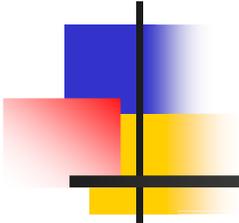


Ordine degli Ingegneri della Provincia di Pistoia  
Corso sulla Vulnerabilità Sismica



# Modelli evolutivi per la verifica del rischio di edifici esistenti

---

## Quaderno 5 Modellazione nonlineare

**Prof. Enrico Spacone**

Dipartimento di Ingegneria e Geologia  
Università degli Studi "G. D'Annunzio" Chieti-Pescara

DIPARTIMENTO DI

INGEGNERIA  
E GEOLOGIA

*31 Maggio 2012*



# SOMMARIO

---

- **Livelli di analisi**
- **Algoritmi per le analisi dinamiche nonlineari**
- **Modelli di telai nonlineari**

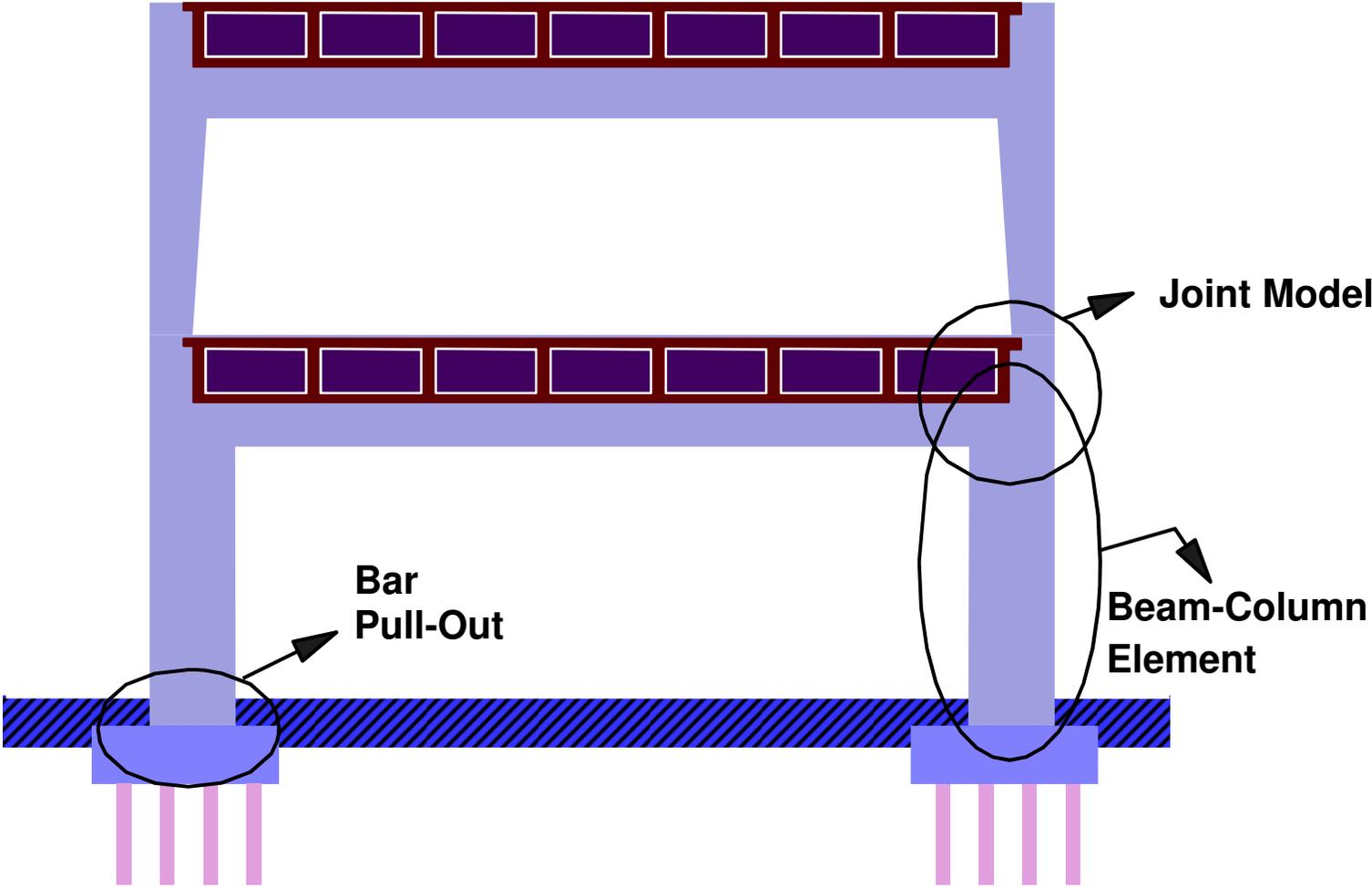
# SOMMARIO

---

- **Livelli di analisi**
- **Algoritmi per le analisi dinamiche nonlineari**
- **Modelli di telai nonlineari**

# LIVELLI DI ANALISI

---



# LIVELLI DI ANALISI

---

## Elementi Finiti 3D

- ❑ Caso + generale
- ❑ Importante per comprendere i meccanismi di risposta e rottura locali
- ❑ Oneroso nei tempi di esecuzione, soprattutto in campo nonlineare
- ❑ Le analisi nonlineari richiedono molta esperienza
- ❑ Esistono grossi rischi in analisi nonlineari (problemi di localizzazione, non convergenza)

# LIVELLI DI ANALISI

---

## Elementi Finiti 3D

- ❑ Scelta della mesh (remesh automatica)
- ❑ Necessità di definire leggi nonlineari per l'acciaio, il cls, lo sfilamento, etc.
- ❑ Problemi legati al trattamento continuo di un mezzo discontinuo (a causa della fessurazione del cls, per esempio)
- ❑ Grosso controllo dei dati di input
- ❑ Complessità dell'output
- ❑ Caso dinamico nonlineare troppo lungo e complesso

# LIVELLI DI ANALISI

---

## Elementi Finiti 2D

- ❑ In molti casi e' possibile fare delle analisi agli EF con modelli 2D (plane stress o plane strain)
- ❑ Riduzione drastica dei gdl
- ❑ Persistono i problemi di definizione delle nonliearità
- ❑ Analisi FEM 2D e 3D nonlineari vengono al momento fatte per lo studio di fenomeni locali (nodo trave pilastro, singoli elementi strutturali, etc.)

# LIVELLI DI ANALISI

---

## Analisi con elementi a telaio

- ❑ Molto + veloci
- ❑ Diventa + facile analizzare il comportamento intero di una struttura complessa
- ❑ Alcuni fenomeni locali sono difficili da descrivere (sfilamento, comportamento dei nodi, confinamento, etc.)



**Analisi usate dalle normative sismiche**

# SOMMARIO

---

- **Livelli di analisi**
- **Algoritmi per le analisi dinamiche nonlineari**
- **Modelli di telai nonlineari**

# ANALISI NON LINEARI A LIVELLO DI STRUTTURA

Come funziona, procede un'analisi nonlineare?

- Si applica alla struttura una storia di carico
  - ✓ In generale bisogna specificare nella fase di preparazione dei dati che l'analisi è nonlineare
  - ✓ Sempre nella fase di input si specificano le fonti di nonlinearietà
  - ✓ La storia di carico può essere definita in termini di forze, spostamenti, o misti
  - ✓ La storia di carico è espressa in incrementi, più o meno piccoli

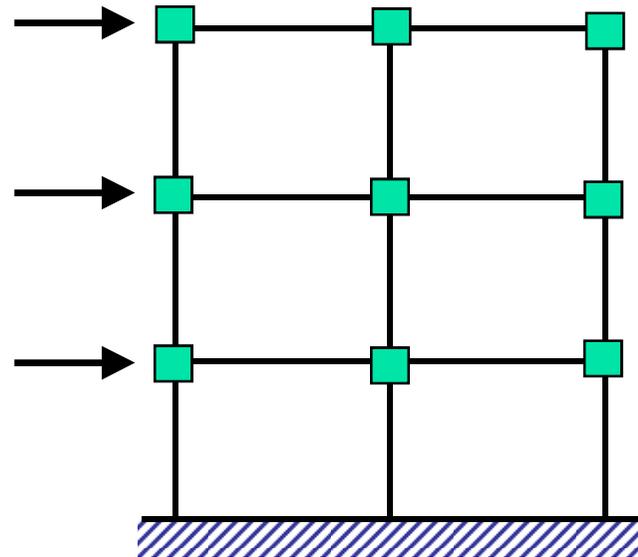
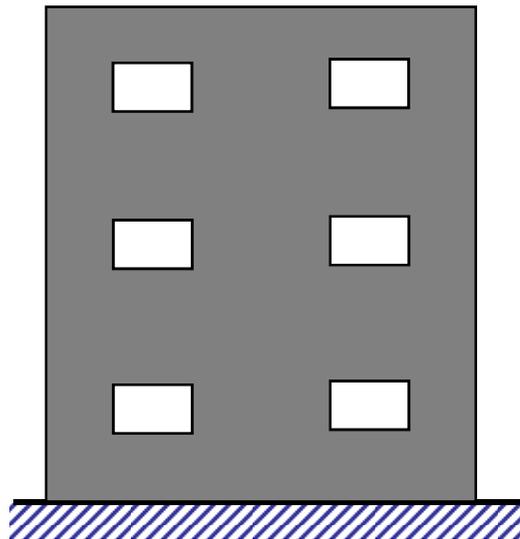
# BASI DELL'ANALISI STRUTTURALE

---

**Edificio**

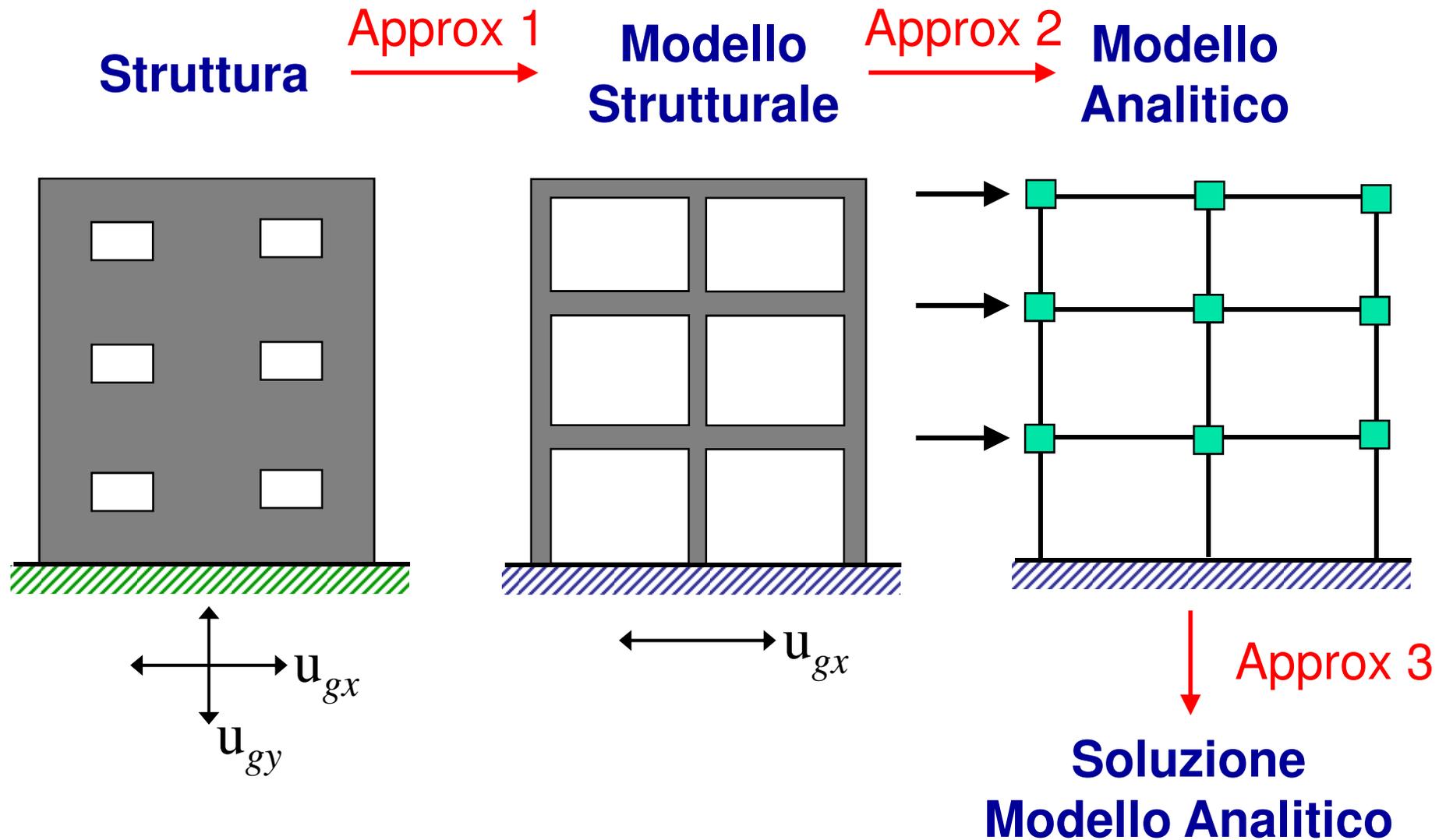


**Schema analitico  
con carichi e/o spostamenti**



Importante capire le approx che si fanno nel passaggio da struttura a modello analitico

# BASI DELL'ANALISI STRUTTURALE



# BASI DELL'ANALISI STRUTTURALE

---



Anche se è possibile trovare la soluzione esatta del Modello Analitico, bisogna sempre interpretare i risultati in relazione alle approssimazioni fatte per passare dalla Struttura al Modello Strutturale e dal Modello Strutturale al Modello Analitico

# BASI DELL'ANALISI STRUTTURALE

---

## COMPONENTI BASE

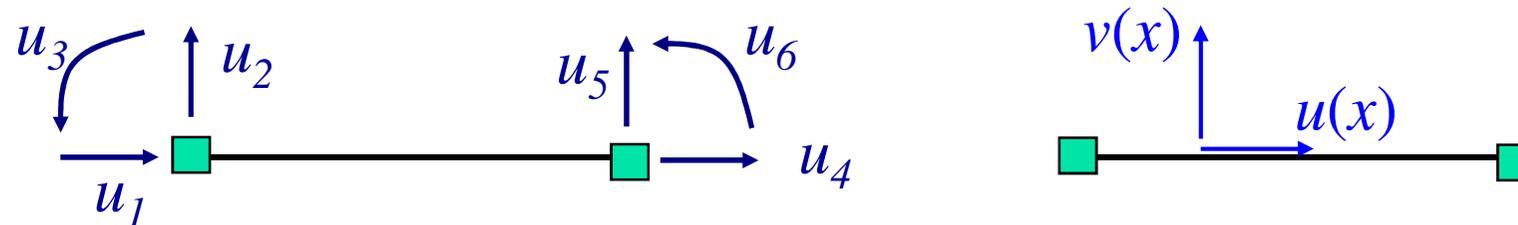
- ❑ Nodi
  - ❑ Gradi di libertà
  - ❑ Elementi
  - ❑ Materiali
  - ❑ Forze
  - ❑ Condizioni al contorno
- } 93
- } 94

**Il comportamento lineare o nonlineare dipende praticamente sempre dagli elementi!!!!!!!**

# ANALISI LINEARE

---

## Elemento Telaio



## Assunzione campi di spostamento (EF)

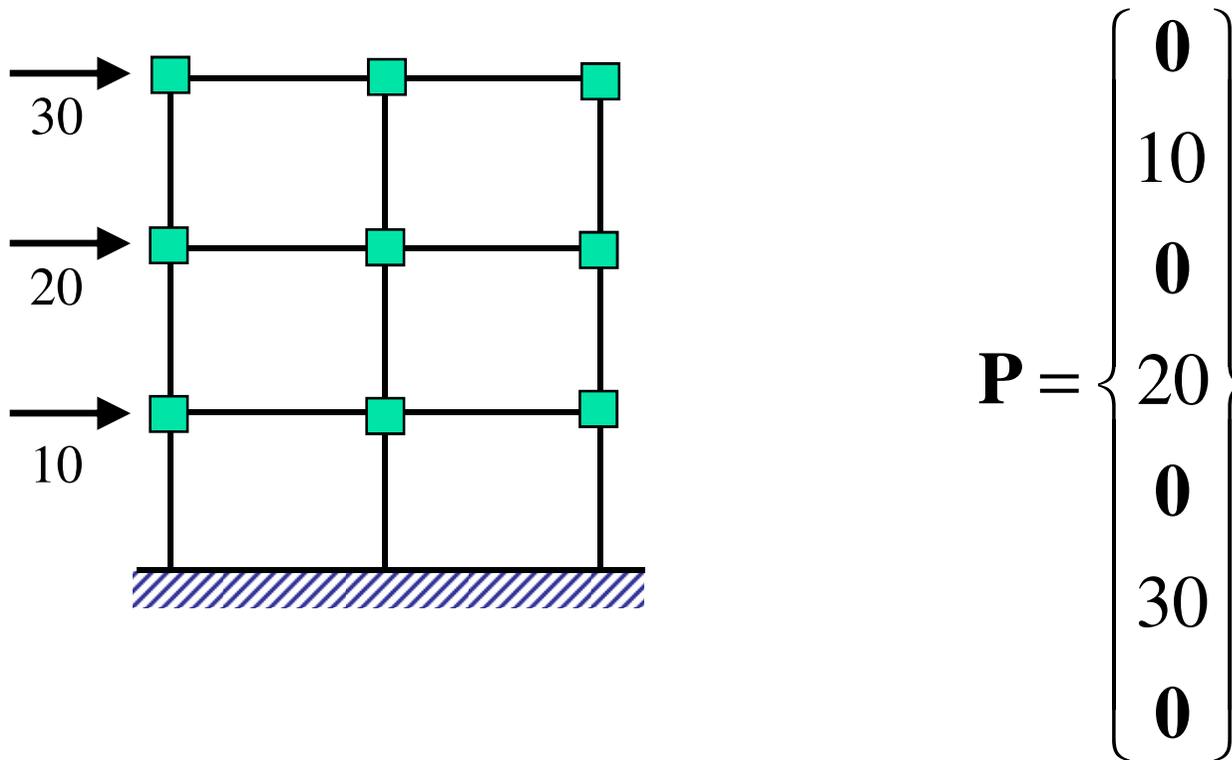
$u(x) = \text{lineare}$   
 $v(x) = \text{cubico}$

“esatti” se  $A(x) = \text{const}$  e  $I(x) = \text{const}$

# PASSI ANALISI LINEARE

---

## Assemblaggio vettore forze esterne



# PASSI ANALISI LINEARE

Calcolo  
matrice rigidezza  
di ogni elemento



$$\mathbf{K}_{EB-beam} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

$EA(x) = \text{const}$

$EI(x) = \text{const}$

# PASSI ANALISI LINEARE

---

Assemblaggio matrice rigidezza struttura

$$\mathbf{K} = \mathbf{A} \sum_{e=1}^{Nel} \{\mathbf{K}^e\}$$

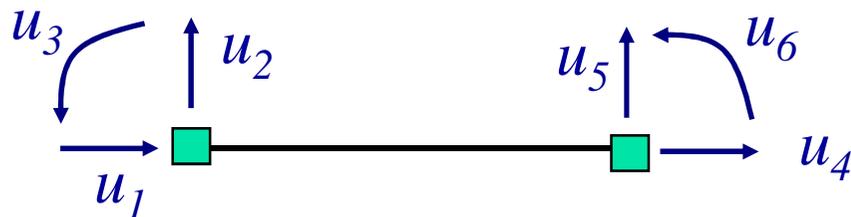
Soluzione equazioni equilibrio  $\mathbf{P} = \mathbf{K}\mathbf{U}$

$$\mathbf{U} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{P}$$

# PASSI ANALISI LINEARE

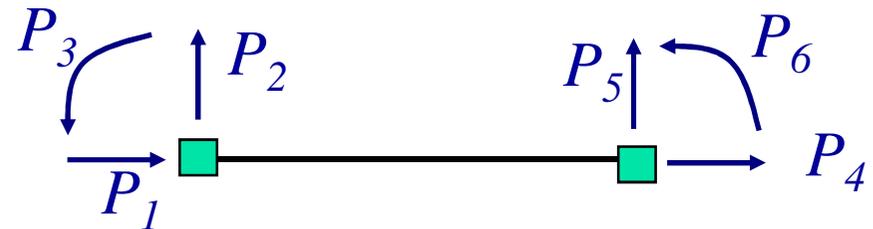
---

Calcolo forze elemento (e forze interne di sezione)



$$\mathbf{U}^e = \begin{Bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_6 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{P}^e = \mathbf{K}^e \mathbf{U}^e$$

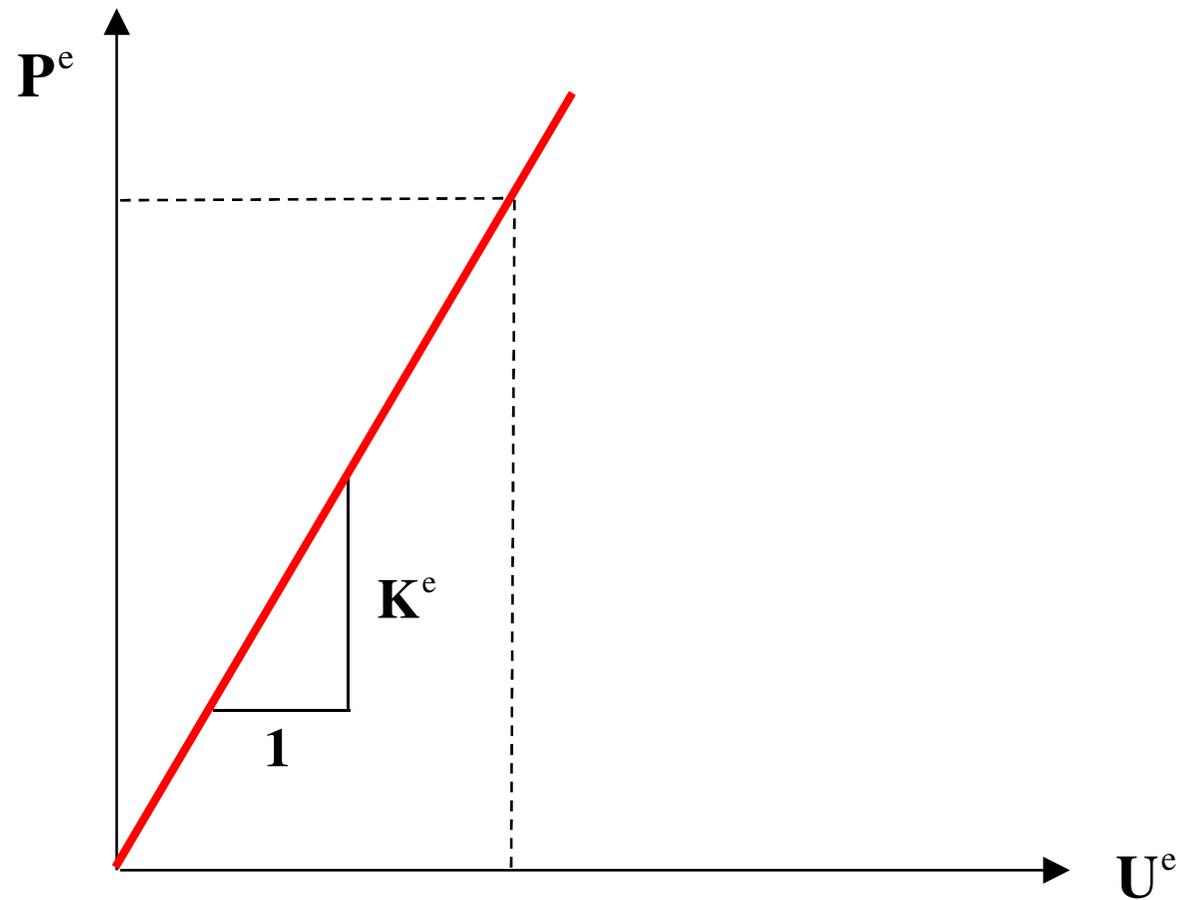


$$\mathbf{P}^e = \begin{Bmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_6 \end{Bmatrix}$$

# PASSI ANALISI LINEARE

---

## Forze elemento



# PASSI ANALISI LINEARE

---

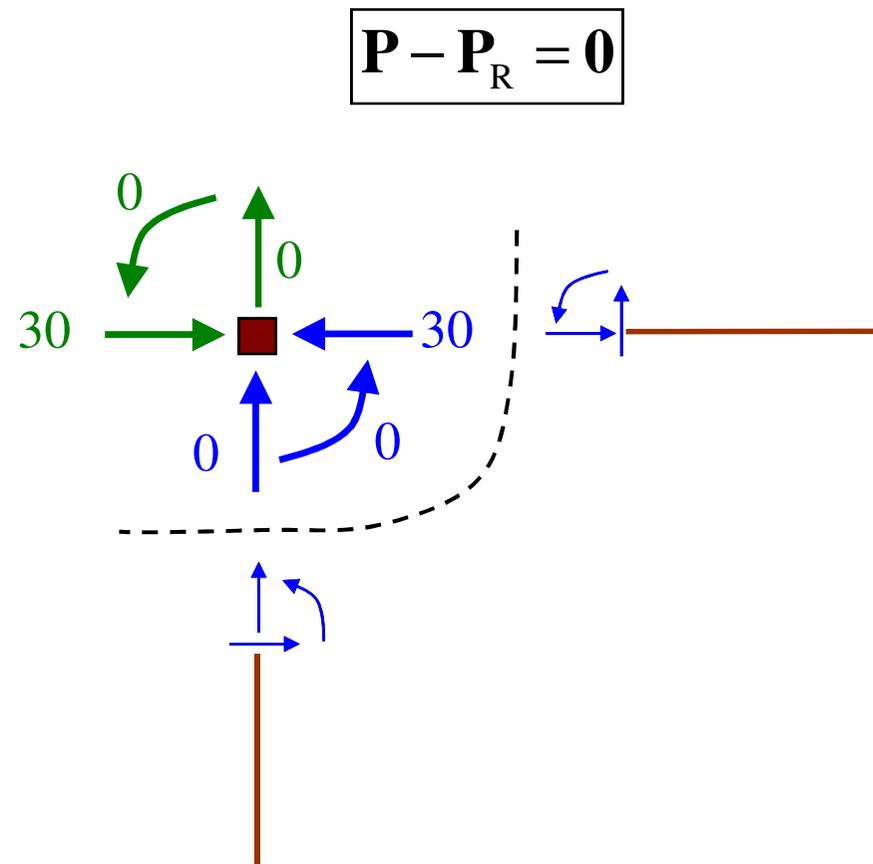
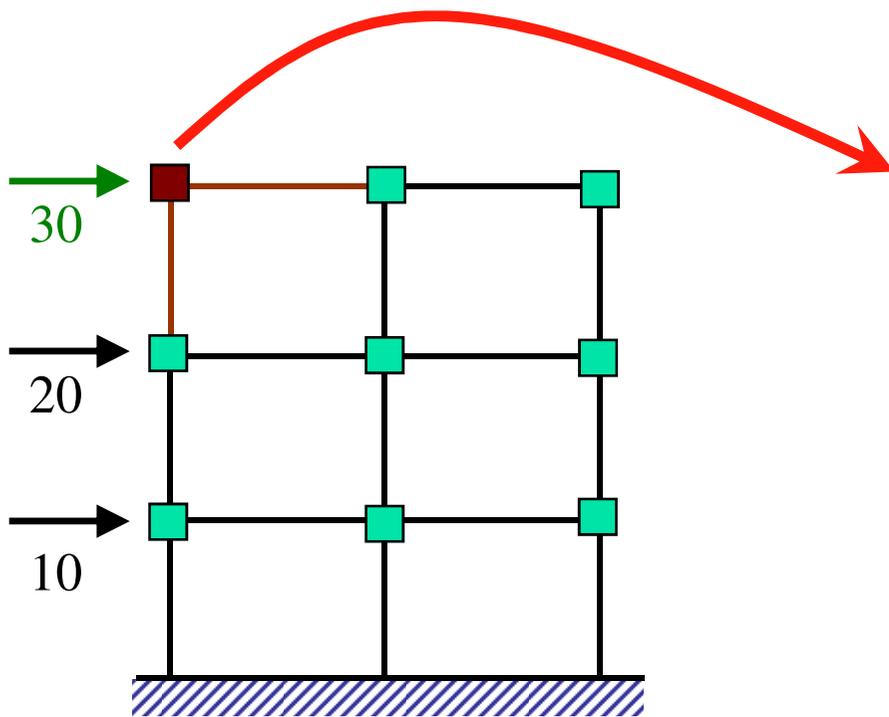
**Controllo equilibrio forze esterne = forze interne  
(solo se analisi lineare fatta con un codice di  
calcolo nonlineare, per controllare la  
convergenza)**

$$\mathbf{P} - \mathbf{P}_R = \mathbf{0}$$

**Forze applicate – Forze resistenti = 0**

# PASSI ANALISI LINEARE

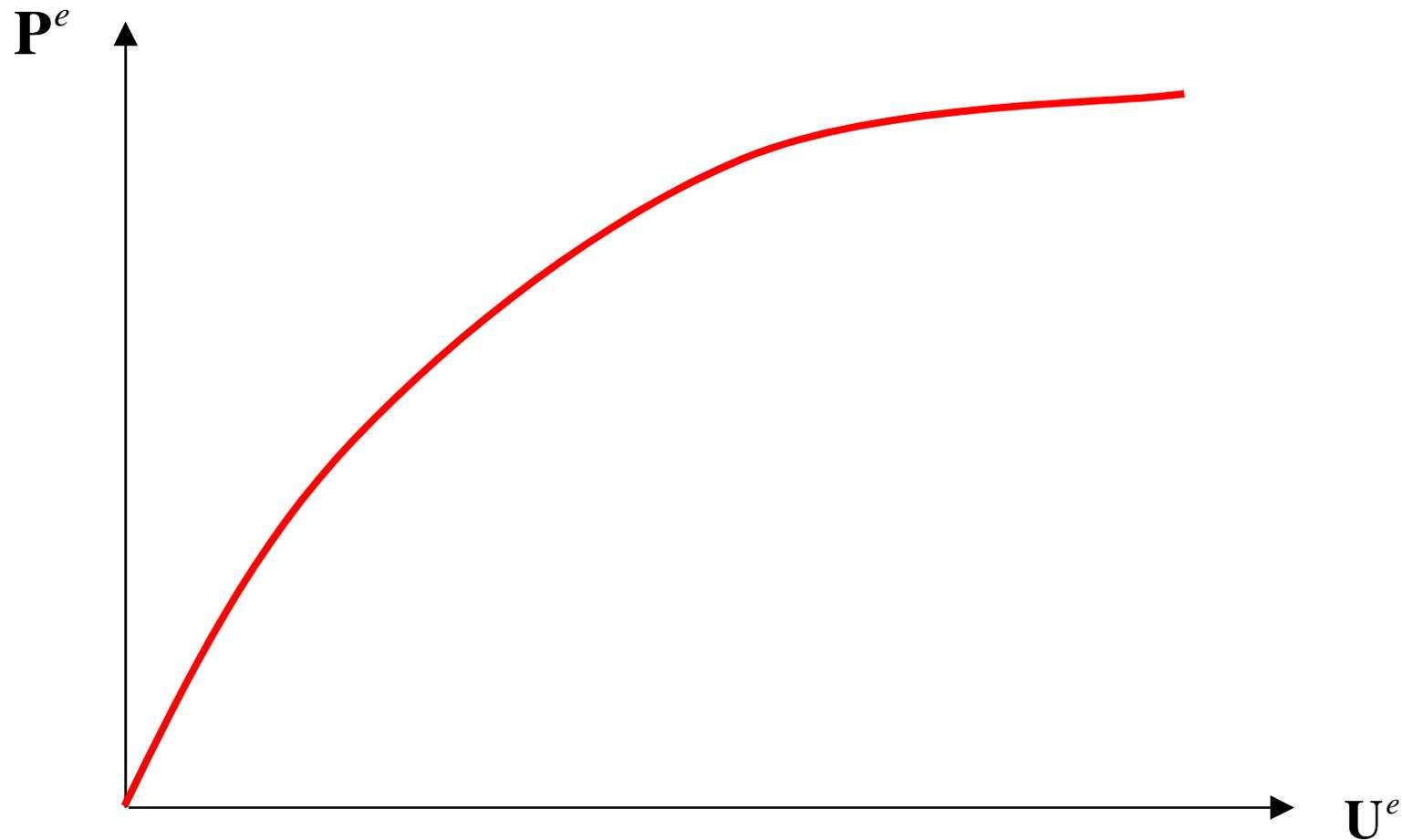
## Equilibrio nodo



# ANALISI NONLINEARE

---

Il comportamento non-lineare deriva dall'elemento



# ANALISI DINAMICHE

---

Si cerca configurazione equilibrata nella quale

## Struttura Lineare

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{P}(t)$$

soluzione a istanti  $0, \dots, t_n, t_{n+1}, \dots$   
senza iterazioni ad ogni istante  $t_n$

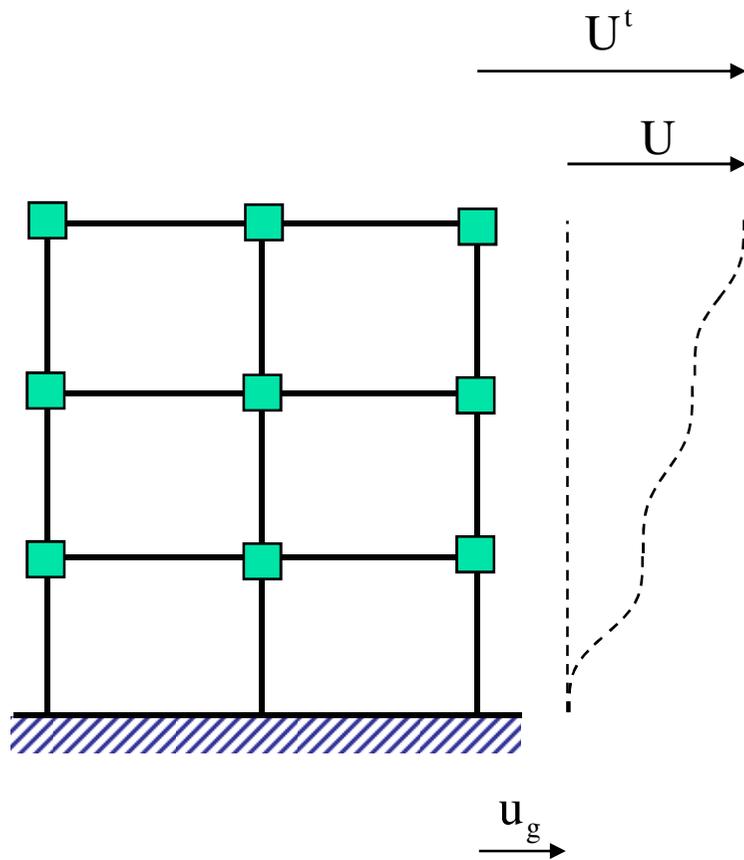
## Struttura Nonlineare

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{U}} + \mathbf{P}_R(\mathbf{U}, \text{storia}) = \mathbf{P}(t)$$

soluzione a istanti  $0, \dots, t_n, t_{n+1}, \dots$   
servono iterazioni ad ogni istante  $t_n$

# ANALISI DINAMICHE

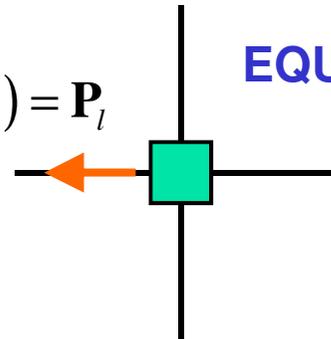
$$\underbrace{\mathbf{U}^t}_{\text{spostamento totale}} = \underbrace{\mathbf{U}}_{\text{spostamento relativo al suolo}} + \underbrace{\mathbf{u}_g}_{\text{spostamento del suolo}}$$



GENERICO gdl  $l$

$$\mathbf{P}_{R_l}(\mathbf{U}) = \mathbf{P}_l$$

EQUILIBRIO STATICO

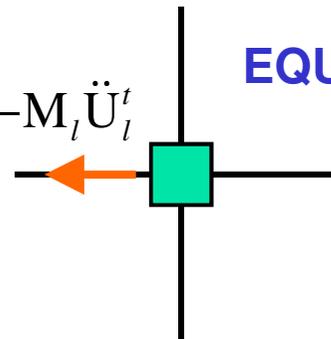


Caso elastico-lineare

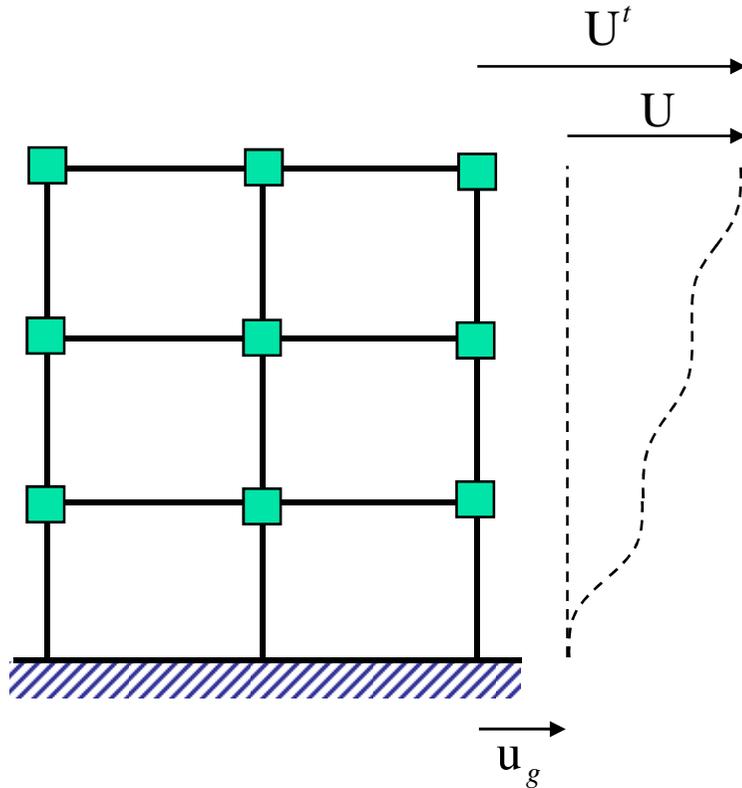
$$\mathbf{P}_{R_l}(\mathbf{U}) = \sum_{m=1}^N \mathbf{K}_{lm} \mathbf{U}_m$$

$$\mathbf{P}_{R_l}(\mathbf{U}) = -\mathbf{M}_l \ddot{\mathbf{U}}_l^t$$

EQUILIBRIO DINAMICO



# ANALISI DINAMICHE



$\mathbf{L}$  = vettore di trascinamento

## STRUTTURA LINEARE

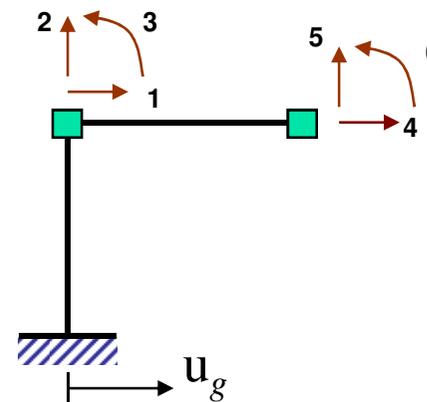
$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}^t + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{U}^t = \mathbf{U} + \mathbf{L}u_g$$

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = -\mathbf{M}\mathbf{L}\ddot{u}_g$$

## STRUTTURA NONLINEARE

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{P}_R(\mathbf{U}) = -\mathbf{M}\mathbf{L}\ddot{u}_g$$



$$\mathbf{L} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

# ANALISI DINAMICHE

---

## EQUILIBRIO DINAMICO CON SMORZAMENTO

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = -\mathbf{M}\mathbf{L}\ddot{u}_g \quad \text{EQ. LINEARE}$$

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{P}_R(\mathbf{U}) = -\mathbf{M}\mathbf{L}\ddot{u}_g \quad \text{EQ. NONLINEARE}$$

Il termine di **smorzamento viscoso** descrive fenomeni dissipativi molto complessi:

tutti i fenomeni dissipativi

comportamento plastico

attrito

ingranamento degli inerti

scorrimenti

contatto fra elementi strutturali e non-strutturali .....

L'approssimazione è molto cruda!!!!

# ANALISI DINAMICHE

---

## COME SCEGLIERE LA MATRICE DI SMORZAMENTO?

SMORZAMENTO CLASSICO (*Rayleigh Damping Matrix*)

$$\mathbf{C} = a_0 \mathbf{M} + a_1 \mathbf{K}$$

Molto conveniente, perchè in campo elastico permette l'ortogonalizzazione dei modi → analisi modale

Si può dimostrare che attribuendo a due modi generici  $m$  ed  $n$  (con frequenze  $\omega_n$  e  $\omega_m$ ) coefficienti di smorzamento  $\xi_m$  e  $\xi_n$  (solitamente 5% in campo lineare

$$\begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega_m} & \omega_m \\ \frac{1}{\omega_n} & \omega_n \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \xi_m \\ \xi_n \end{Bmatrix}$$

# ANALISI DINAMICHE

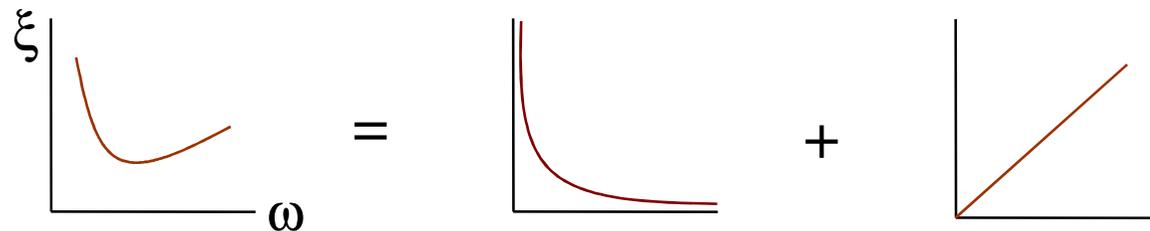
---

## SMORZAMENTO DI RAYLEIGH

$$\xi(\omega) = \frac{1}{2} \left( \frac{a_0}{\omega} + a_1 \omega \right)$$

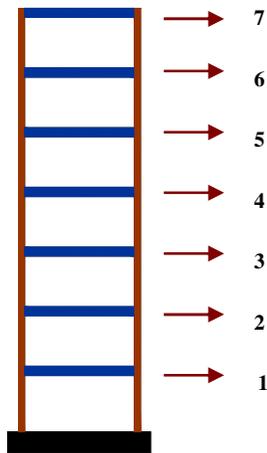
Smorzamento  
proporzionale a **M**

Smorzamento  
proporzionale a **K**

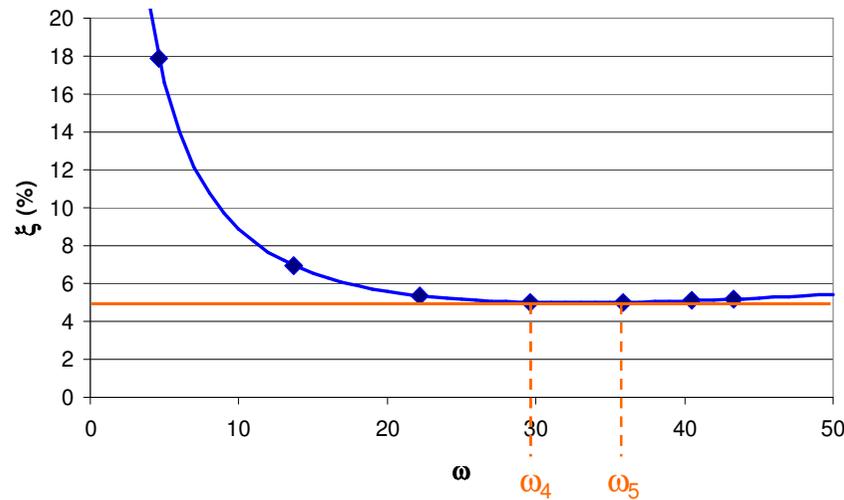
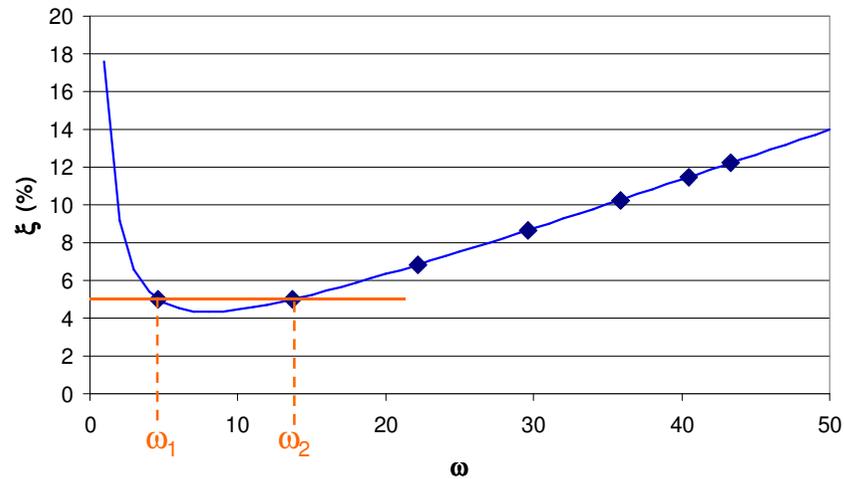


# ANALISI DINAMICHE

## SMORZAMENTO DI RAYLEIGH



$\omega$ (1/sec)	T (sec)
4.6300	1.3570
13.6877	0.4590
22.1472	0.2837
29.6388	0.2120
35.8350	0.1753
40.4650	0.1553
43.3265	0.1450



# ANALISI DINAMICHE

---

## COME SCEGLIERE LA MATRICE DI SMORZAMENTO?

### SMORZAMENTO CLASSICO

$$\mathbf{C} = \mathbf{M} \left[ \sum_{i=1}^J \frac{2\xi_i \omega_i}{M_i^*} \Phi_i \Phi_i^T \right] \mathbf{M}$$

E' possibile controllare il coeff. di smorzamento in tutti i modi  
Pochi programmi lo includono

Lo smorzamento e il suo uso sono problemi ancora molto aperti. Lo smorzamento ha comunque un effetto importantissimo sull'ampiezza della risposta

# ANALISI DINAMICHE

---

## COME SCEGLIERE LA MATRICE DI SMORZAMENTO PER ANALISI NONLINEARI?

### SMORZAMENTO DI RAYLEIGH CON RIGIDEZZA INIZIALE

$$\mathbf{C} = a_0 \mathbf{M} + a_1 \mathbf{K}_0$$

Visto che la dissipazione di energia dovuta al comportamento nonlineare materiale è considerato esplicitamente nel termine  $\mathbf{P}_R$ , si consiglia di usare coeff. di smorzamento  $\xi$  dei primi due modi elastici dell'ordine di 2-3%, altrimenti si tende a sottostimare la risposta della struttura (sovrasmorzando la risposta della struttura)

Si può anche aggiornare la matrice di smorzamento ad ogni passo, od ogni tot passi, dopo aver trovato le frequenze modali

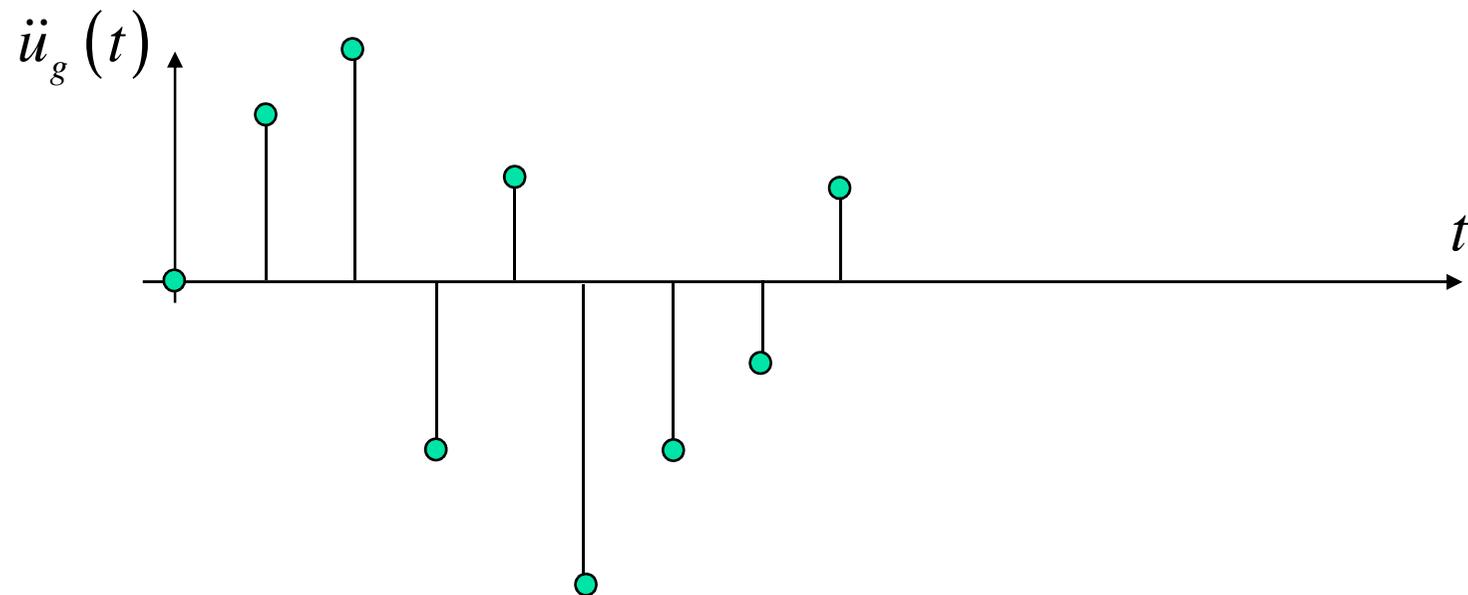
$$\mathbf{C} = a_0 \mathbf{M} + a_1 \mathbf{K}_{\tan}$$

# ANALISI DINAMICHE CON TERREMOTO

---

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{U}} + \mathbf{P}_R(\mathbf{U}) = -\mathbf{M}\mathbf{L}\ddot{u}_g$$

Il terremoto è dato ad intervalli regolari (per esempio 0,02 sec)



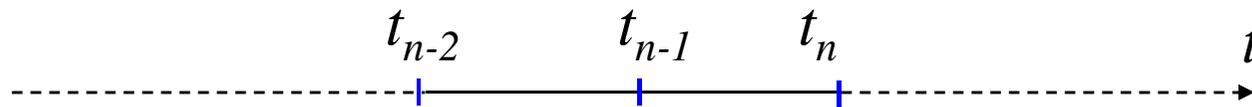
# ANALISI DINAMICHE CON TERREMOTO

---

## Analisi al passo



Il tempo viene discretizzato in intervalli non necessariamente uguali a quelli del terremoto



## METODO DI NEWMARK

$$\mathbf{U}_n = \mathbf{U}_{n-1} + [\Delta t] \dot{\mathbf{U}}_{n-1} + [(1-2\beta) \frac{\Delta t^2}{2}] \ddot{\mathbf{U}}_{n-1} + [\beta \Delta t^2] \ddot{\mathbf{U}}_n$$

$$\dot{\mathbf{U}}_n = \dot{\mathbf{U}}_{n-1} + [(1-\gamma)\Delta t] \ddot{\mathbf{U}}_{n-1} + [\gamma \Delta t] \ddot{\mathbf{U}}_n$$

$\beta$  e  $\gamma$ - parametri che controllano l'accuratezza e la stabilità dell'algoritmo

## Analisi al passo con Metodo Newmark Al passo $n$

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_n + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}_n + \mathbf{K}\mathbf{U}_n = \mathbf{P}_n$$

$$[\mathbf{M} + \Delta t \gamma \mathbf{C} + \Delta t^2 \beta \mathbf{K}] \ddot{\mathbf{U}}_n + \mathbf{C} [\dot{\mathbf{U}}_{n-1} + \Delta t (1 - \gamma) \ddot{\mathbf{U}}_{n-1}] + \mathbf{K} [\mathbf{U}_{n-1} + \Delta t \dot{\mathbf{U}}_{n-1} + \Delta t^2 (0.5 - \beta) \ddot{\mathbf{U}}_{n-1}] = \mathbf{P}_n$$

$$\ddot{\mathbf{U}}_n = [\mathbf{K}_{eq}]^{-1} \tilde{\mathbf{P}}_n$$

$$\mathbf{K}_{eq} = \mathbf{M} + \Delta t \gamma \mathbf{C} + \Delta t^2 \beta \mathbf{K}$$

$$\tilde{\mathbf{P}}_n = \mathbf{P}_n - \mathbf{C} [\dot{\mathbf{U}}_{n-1} + \Delta t (1 - \gamma) \ddot{\mathbf{U}}_{n-1}] - \mathbf{K} [\mathbf{U}_{n-1} + \Delta t \dot{\mathbf{U}}_{n-1} + \Delta t^2 (0.5 - \beta) \ddot{\mathbf{U}}_{n-1}]$$

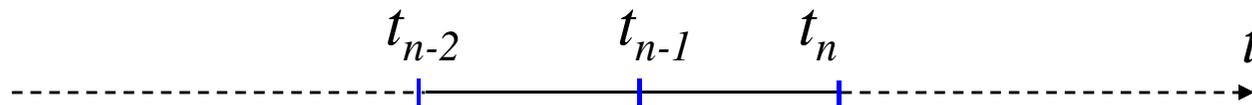
LINEARE

# ANALISI DINAMICHE CON TERREMOTO

---

## Analisi al passo

Il tempo viene discretizzato in intervalli non necessariamente uguali a quelli del terremoto



## METODO DI NEWMARK

$$\dot{\mathbf{U}}_n = (\Delta t) \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right) \ddot{\mathbf{U}}_{n-1} + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right) \dot{\mathbf{U}}_{n-1} + \frac{\gamma}{\beta(\Delta t)} (\mathbf{U}_n - \mathbf{U}_{n-1})$$

$$\ddot{\mathbf{U}}_n = \left(1 - \frac{1}{2\beta}\right) \ddot{\mathbf{U}}_{n-1} - \frac{1}{\beta(\Delta t)} \dot{\mathbf{U}}_{n-1} + \frac{1}{\beta(\Delta t)^2} (\mathbf{U}_n - \mathbf{U}_{n-1})$$

$\beta$  e  $\gamma$ - parametri che controllano l'accuratezza e la stabilità dell'algoritmo

## Analisi al passo con Metodo Newmark Al passo $n$

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_n + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}_n + \mathbf{K}\mathbf{U}_n = \mathbf{P}_n$$

$$\mathbf{U}_n = [\mathbf{K}_{eq}]^{-1} \tilde{\mathbf{P}}_n$$

LINEARE

$$\tilde{\mathbf{P}}_n = \left[ \mathbf{M} \left( 1 - \frac{1}{2\beta} \right) + \mathbf{C}(\Delta t) \left( 1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \right] \ddot{\mathbf{U}}_{n-1} + \left[ -\mathbf{M} \frac{1}{\beta(\Delta t)} + \mathbf{C} \left( 1 - \frac{\gamma}{\beta} \right) \right] \dot{\mathbf{U}}_{n-1} + \left[ -\mathbf{M} \frac{1}{\beta(\Delta t)^2} - \mathbf{C} \frac{\gamma}{\beta(\Delta t)} \right] \mathbf{U}_{n-1}$$

$$\mathbf{K}_{eq} = \left[ \frac{1}{\beta(\Delta t)^2} \mathbf{M} + \frac{\gamma}{\beta(\Delta t)} \mathbf{C} + \mathbf{K} \right]$$

## Analisi al passo con Metodo Newmark

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_n + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}_n + \mathbf{P}_R(\mathbf{U}_n) \neq \mathbf{P}_n$$

Servono iterazioni  $i$  per trovare equilibrio dinamico

NONLINEARE

# ANALISI DINAMICHE NONLINEARI

---

- **Equation of motion** (in semi-discretized form):

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_n + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}_n + \mathbf{P}_R(\mathbf{U}_n) = -\mathbf{M}\mathbf{L}\ddot{u}_{g_n} = \mathbf{P}_n$$

- **Residual form of equation of motion at  $t_n = n \Delta t$ :**

$$\Psi_n = \mathbf{P}_n - \mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_n - \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}_n - \mathbf{P}_R(\mathbf{U}_n) = \mathbf{0}$$

- **Time stepping method** (e.g., Newmark):

$$\dot{\mathbf{U}}_n = (\Delta t) \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right) \ddot{\mathbf{U}}_{n-1} + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right) \dot{\mathbf{U}}_{n-1} + \frac{\gamma}{\beta(\Delta t)} (\mathbf{U}_n - \mathbf{U}_{n-1})$$

$$\ddot{\mathbf{U}}_n = \left(1 - \frac{1}{2\beta}\right) \ddot{\mathbf{U}}_{n-1} - \frac{1}{\beta(\Delta t)} \dot{\mathbf{U}}_{n-1} + \frac{1}{\beta(\Delta t)^2} (\mathbf{U}_n - \mathbf{U}_{n-1})$$

# ANALISI DINAMICHE NONLINEARI

---

- From previous expressions

$$\Psi_n = \tilde{\mathbf{P}}_n - \left[ \frac{1}{\beta(\Delta t)^2} \mathbf{M} \mathbf{U}_n + \frac{\gamma}{\beta(\Delta t)} \mathbf{C} \mathbf{U}_n + \mathbf{P}_R(\mathbf{U}_n) \right] = \mathbf{0}$$

where

$$\tilde{\mathbf{P}}_n = \mathbf{P}_n + \mathbf{M} \left[ \frac{1}{\beta(\Delta t)^2} \mathbf{U}_{n-1} + \frac{1}{\beta(\Delta t)} \dot{\mathbf{U}}_{n-1} - \left( 1 - \frac{1}{2\beta} \right) \ddot{\mathbf{U}}_{n-1} \right] +$$
$$\mathbf{C} \left[ \frac{\gamma}{\beta(\Delta t)} \mathbf{U}_{n-1} - \left( 1 - \frac{\gamma}{\beta} \right) \dot{\mathbf{U}}_{n-1} - (\Delta t) \left( 1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \ddot{\mathbf{U}}_{n-1} \right]$$



$$\boxed{\Psi_n(\mathbf{U}_n) = \mathbf{0}}$$

: Nonlinear vector algebraic equation

# ANALISI DINAMICHE NONLINEARI

- **Newton-Raphson incremental-iterative procedure:**

$$\left[ \frac{\partial \Psi_n^{i-1}}{\partial \mathbf{U}_n^{i-1}} \right] d\mathbf{U}_n^i = -\Psi(\mathbf{U}_n^{i-1}) = -\Psi_n^{i-1}$$



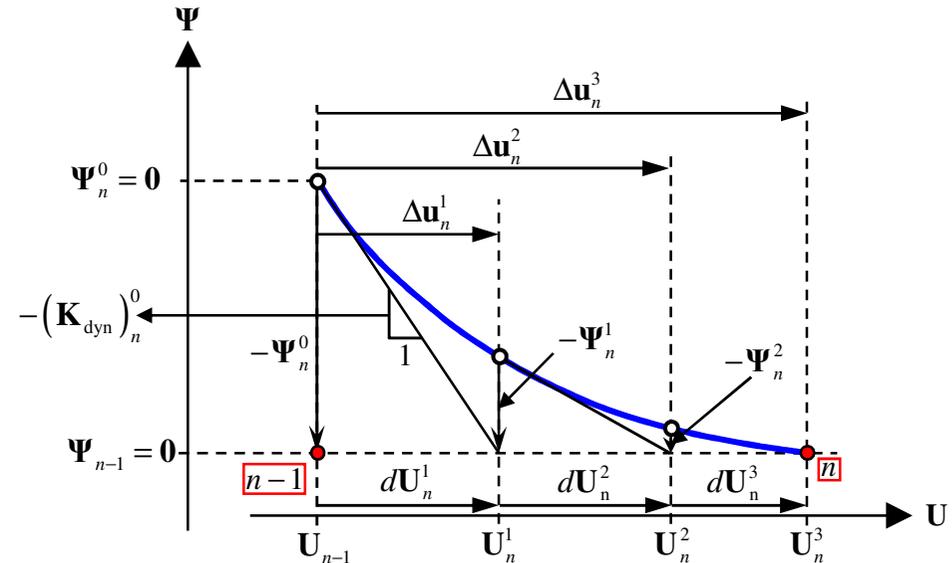
$$\left( \mathbf{K}_{\text{dyn}} \right)_n^{i-1} d\mathbf{U}_n^i = -\Psi_n^{i-1}$$

where

$$\left( \mathbf{K}_{\text{dyn}} \right)_n^{i-1} = \left[ \frac{1}{\beta(\Delta t)^2} \mathbf{M} + \frac{\gamma}{\beta(\Delta t)} \mathbf{C} + \left( \mathbf{K} \right)_n^{i-1} \right]$$

$$\Psi_n^{i-1} = \mathbf{P}_n - \left[ \frac{1}{\beta(\Delta t)^2} \mathbf{M} \mathbf{U}_n^{i-1} + \frac{\gamma}{\beta(\Delta t)} \mathbf{C} \mathbf{U}_n^{i-1} + \mathbf{P}_R(\mathbf{U}_n^{i-1}) \right]$$

$$\mathbf{U}_n^i = \mathbf{U}_{n-1} + \Delta \mathbf{U}_n^i = \mathbf{U}_n^{i-1} + d\mathbf{U}_n^i$$



**: Dynamic consistent/algorithmic tangent stiffness matrix**

**: Dynamic residual vector**

## Analisi al passo con Metodo Newmark

$$\left( \mathbf{K}_{\text{dyn}} \right)_n^{i-1} d\mathbf{U}_n^i = -\mathbf{\Psi}_n^{i-1}$$

The diagram illustrates the relationship between the dynamic stiffness matrix, dynamic forces, and incremental displacements in the Newmark method. The equation  $\left( \mathbf{K}_{\text{dyn}} \right)_n^{i-1} d\mathbf{U}_n^i = -\mathbf{\Psi}_n^{i-1}$  is shown in a red box. Three blue arrows point from the terms in the equation to their respective labels: one from  $\left( \mathbf{K}_{\text{dyn}} \right)_n^{i-1}$  to "Matrice di rigidezza equivalente", one from  $d\mathbf{U}_n^i$  to "Spostamenti incrementali", and one from  $-\mathbf{\Psi}_n^{i-1}$  to "Forze dinamiche Non equilibrate".

All'istante  $t_n$  le operazioni numeriche per raggiungere l'equilibrio sono formalmente molto simili alle iterazioni in campo statico nonlineare

## Generalizzazione

<b>STATICO</b>	$\mathbf{P}_n = \lambda_{ref}(\tau_n) \mathbf{P}_{ref} \quad \tau = pseudo-tempo$ $(\mathbf{P}_{unb})_n^{i-1} = \Delta \mathbf{P}_n^i = \mathbf{P}_n - (\mathbf{P}_R)_n^{i-1}$ $d\mathbf{U}_n^i = [\mathbf{K}_n^{i-1}]^{-1} (\mathbf{P}_{unb})_n^{i-1}$	
<b>DINAMICO</b>	$\mathbf{P}_n = -\mathbf{M}\mathbf{L}\ddot{\mathbf{U}}_g(t_n)$ $\boldsymbol{\Psi}_n^{i-1} = \mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_n^{i-1} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}_n^{i-1} + (\mathbf{P}_R)_n^{i-1} - \mathbf{P}_n$ $[\mathbf{K}_{dyn}]_n^{i-1} = \frac{1}{\Delta t^2 \beta} \mathbf{M} + \frac{\gamma}{\Delta t \beta} \mathbf{C} + \mathbf{K}_n^{i-1}$ $d\mathbf{U}_n^i = ([\mathbf{K}_{dyn}]_n^{i-1})^{-1} (-\boldsymbol{\Psi}_n^{i-1})$	<div style="border: 1px solid red; padding: 5px; color: red; text-align: center;"> <b>solutore unico</b> </div> <div style="border: 1px solid red; padding: 5px; color: red; text-align: center; margin-top: 10px;"> <math>\mathbf{U}_n^i = \mathbf{U}_n^{i-1} + d\mathbf{U}_n^i</math> </div>

# ANALISI DINAMICHE

---

## □ Lineare

### ■ Modale

- Al passo per ogni modo ( $N$  analisi al passo su singolo modo)

### ■ Al Passo per sistema a $N$ gdl

## □ Nonlineare

### ■ Al Passo + iterazioni all'interno di ogni passo

- Da un punto di vista teorico non grosse differenza col caso statico nonlineare. I termini inerziali danno “maggiore stabilità”

### ■ Algoritmi particolari

# SOMMARIO

---

- **Livelli di analisi**
- **Algoritmi per le analisi dinamiche nonlineari**
- **Modelli di telai nonlineari**

# ELEMENTI DI TELAIO NONLINEARI

---

- Elementi a Plasticità Concentrata
  - Cerniera Plastica
    - ✓ Fenomenologica
    - ✓ Teoria della plasticità
    - ✓ A fibre
  
- Elementi a Plasticità Distribuita
  - Formulazione in spostamenti
  - Formulazione in forze
  - Integrazione numerica
  - Modelli di sezione (fenomenologici, teoria della plasticità, a fibre per entrambe le formulazioni)

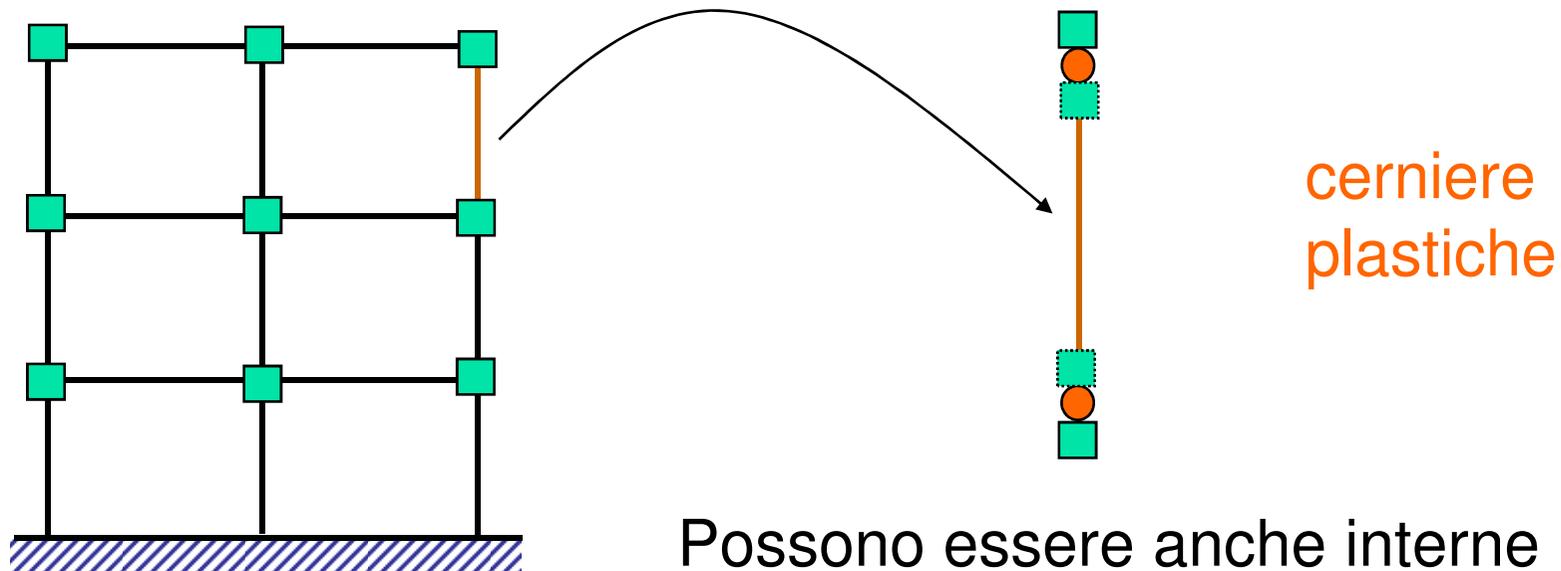
# ELEMENTI DI TELAIO NONLINEARI

---

- **Elementi a Plasticità Concentrata**
  - Cerniera Plastica
    - ✓ Fenomenologica
    - ✓ Teoria della plasticità
    - ✓ A fibre
  
- **Elementi a Plasticità Distribuita**
  - Formulazione in spostamenti
  - Formulazione in forze
  - Integrazione numerica
  - Modelli di sezione (fenomenologici, teoria della plasticità, a fibre per entrambe le formulazioni)

# ELEMENTI A PLASTICITA' CONCENTRATA

- Le cerniere plastiche si formano di solito alle estremita' degli elementi strutturali ed eventualmente vicino alla mezzzeria nelle travi
- In questi punti vengono specificati speciali elementi (cerniere plastiche) mentre il resto dell'elemento rimane elastico

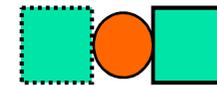


# ELEMENTI A PLASTICITA' CONCENTRATA

---



elemento  
lineare elastico



cerniere  
plastiche

# CERNIERA PLASTICA

---

## □ Il Concetto di Cerniera Plastica

- Lunghezza della Cerniera Plastica
- Modelli

130

## □ Legge Costitutiva Cerniera Plastica

- Ad hoc (per punti secondo normativa)
- Fenomenologica
- Teoria della plasticità
- A fibre

133

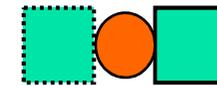
134

135

# ELEMENTI A PLASTICITA' CONCENTRATA



elemento  
lineare elastico



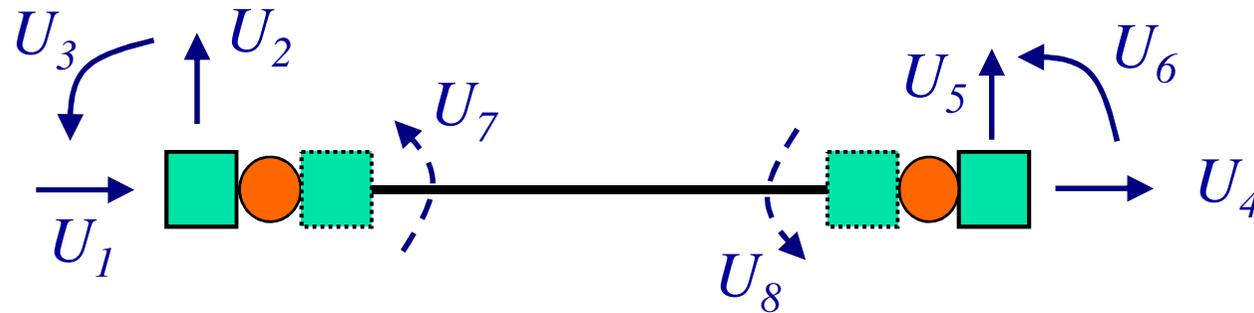
cerniere  
plastiche

Come ottengo la matrice di rigidezza  $\mathbf{K}^e$ ?  
2 approcci: in spostamenti o in forze  $6 \times 6$

# ELEMENTI A PLASTICITA' CONCENTRATA

---

## Formulazione in spostamenti



Scrivo la matrice di rigidezza  $\mathbf{K}^e$  riferita a tutti i gdl  $8 \times 8$

Uso la condensazione statica per eliminare i gdl interni.

- inversione di una matrice di rigidezza
- necessità di avere 4 schemi a seconda del comportamento delle cerniere

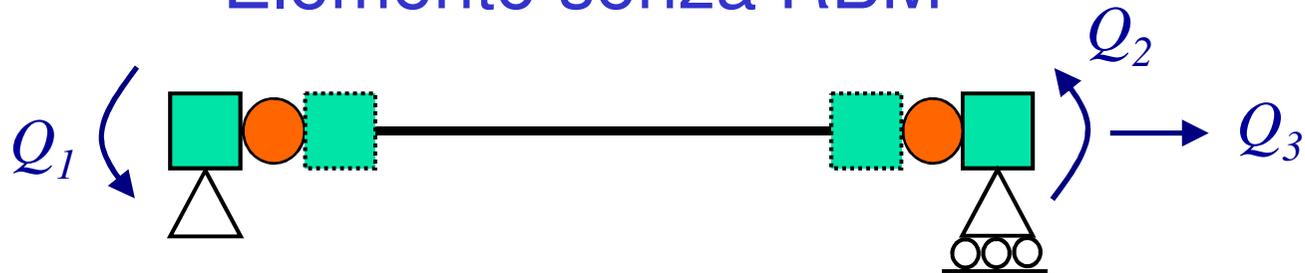
# ELEMENTI A PLASTICITA' CONCENTRATA

## Formulazione in forza



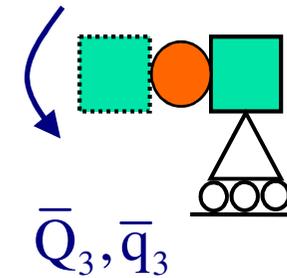
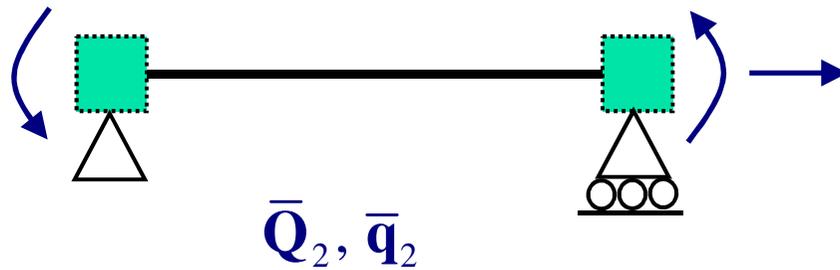
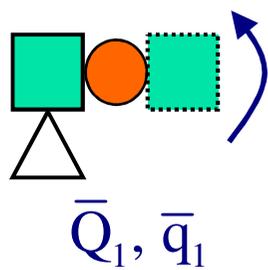
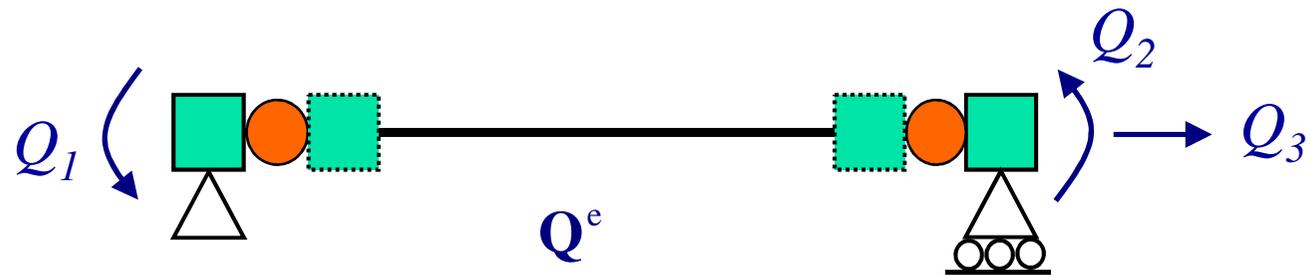
$$\mathbf{P}^e = \mathbf{\Gamma}_{\text{RBM}}^T \mathbf{Q}^e$$

## Elemento senza RBM



# ELEMENTI A PLASTICITA' CONCENTRATA

## Formulazione in forza



$$\bar{Q}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix}$$

$T_1 \quad Q^e$

$$\bar{Q}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix}$$

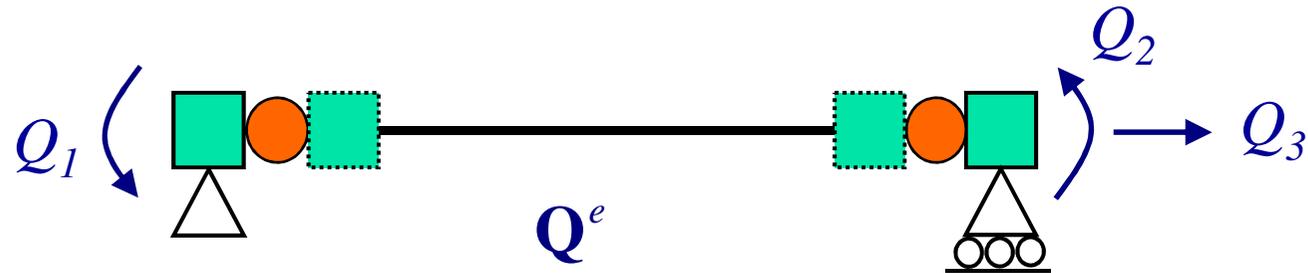
$T_2$

$$\bar{Q}_3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix}$$

$T_3$

# ELEMENTI A PLASTICITA' CONCENTRATA

Formulazione in forze (elastico lineare)



$$\text{PFV} \quad \delta \mathbf{Q}^{eT} \mathbf{q}^e = \delta \bar{\mathbf{Q}}_1^T \bar{\mathbf{q}}_1 + \delta \bar{\mathbf{Q}}_2^T \bar{\mathbf{q}}_2 + \delta \bar{\mathbf{Q}}_3^T \bar{\mathbf{q}}_3$$

$$\mathbf{q}^e = \mathbf{T}_1^T \bar{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{T}_2^T \bar{\mathbf{q}}_2 + \mathbf{T}_3^T \bar{\mathbf{q}}_3$$

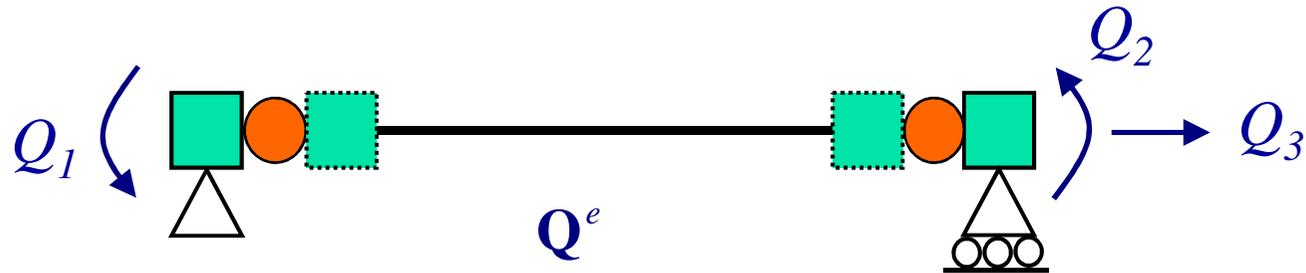
$$\mathbf{f}^e \mathbf{Q}^e = \mathbf{T}_1^T \bar{\mathbf{f}}_1 \bar{\mathbf{Q}}_1 + \mathbf{T}_2^T \bar{\mathbf{f}}_2 \bar{\mathbf{Q}}_2 + \mathbf{T}_3^T \bar{\mathbf{f}}_3 \bar{\mathbf{Q}}_3$$

$$\mathbf{f}^e \mathbf{Q}^e = \mathbf{T}_1^T \bar{\mathbf{f}}_1 \mathbf{T}_1 \mathbf{Q}^e + \mathbf{T}_2^T \bar{\mathbf{f}}_2 \mathbf{T}_2 \mathbf{Q}^e + \mathbf{T}_3^T \bar{\mathbf{f}}_3 \mathbf{T}_3 \mathbf{Q}^e$$

$$\mathbf{f}^e = \mathbf{T}_1^T \bar{\mathbf{f}}_1 \mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2^T \bar{\mathbf{f}}_2 \mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_3^T \bar{\mathbf{f}}_3 \mathbf{T}_3$$

# ELEMENTI A PLASTICITA' CONCENTRATA

Formulazione in forza (nonlineare)



$$\mathbf{q}^e = \mathbf{T}_1^T \bar{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{T}_2^T \bar{\mathbf{q}}_2 + \mathbf{T}_3^T \bar{\mathbf{q}}_3$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^e &= \frac{d\mathbf{q}^e}{d\mathbf{Q}^e} = \mathbf{T}_1^T \frac{d\bar{\mathbf{q}}_1}{d\mathbf{Q}^e} + \mathbf{T}_2^T \frac{d\bar{\mathbf{q}}_2}{d\mathbf{Q}^e} + \mathbf{T}_3^T \frac{d\bar{\mathbf{q}}_3}{d\mathbf{Q}^e} \\ &= \mathbf{T}_1^T \frac{d\bar{\mathbf{q}}_1}{d\bar{\mathbf{Q}}_1} \frac{d\bar{\mathbf{Q}}_1}{d\mathbf{Q}^e} + \mathbf{T}_2^T \frac{d\bar{\mathbf{q}}_2}{d\bar{\mathbf{Q}}_2} \frac{d\bar{\mathbf{Q}}_2}{d\mathbf{Q}^e} + \mathbf{T}_3^T \frac{d\bar{\mathbf{q}}_3}{d\bar{\mathbf{Q}}_3} \frac{d\bar{\mathbf{Q}}_3}{d\mathbf{Q}^e} \\ &= \mathbf{T}_1^T \bar{\mathbf{F}}_1 \mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2^T \bar{\mathbf{F}}_2 \mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_3^T \bar{\mathbf{F}}_3 \mathbf{T}_3 \end{aligned}$$

# ELEMENTI DI TELAIO NONLINEARI

---

## □ Elementi a Plasticità Concentrata

### ■ Cerniera Plastica

- ✓ Fenomenologica
- ✓ Teoria della plasticità
- ✓ A fibre

## □ Elementi a Plasticità Distribuita

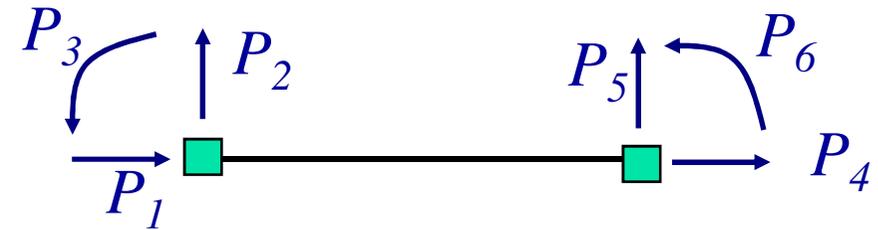
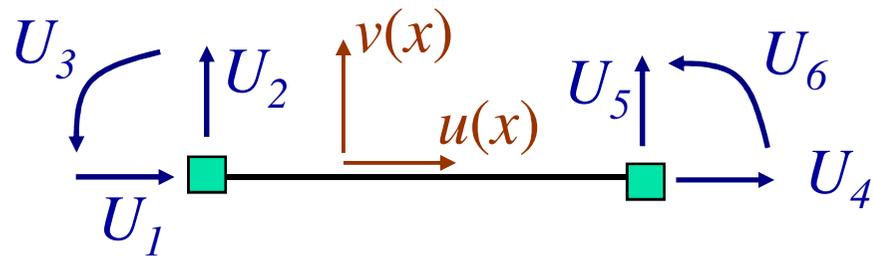
- Formulazione in spostamenti
- Formulazione in forze
- Integrazione numerica
- Modelli di sezione (fenomenologici, teoria della plasticità, a fibre per entrambe le formulazioni)

# ELEMENTI A PLASTICITA' DISTRIBUITA

---

- ❑ Il comportamento è monitorato lungo l'elemento
- ❑ Esistono due approcci fondamentali:
  - Formulazione in spostamenti
  - Formulazione in forze
- ❑ Le formulazioni generano elementi di telaio che richiedono di conoscere la risposta delle sezioni lungo l'elemento

# ELEMENTI A PLASTICITA' DISTRIBUITA



$$\mathbf{U}^e = \begin{Bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_6 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{P}^e = \begin{Bmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_6 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{u}(x) = \begin{Bmatrix} u(x) \\ v(x) \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{e}^s(x) = \begin{Bmatrix} \varepsilon_0(x) \\ \varphi(x) \end{Bmatrix} \begin{array}{l} \text{deformazioni di} \\ \text{sezione} \end{array}$$

$$\mathbf{s}^s(x) = \begin{Bmatrix} N(x) \\ M(x) \end{Bmatrix} \begin{array}{l} \text{forze} \\ \text{di sezione} \end{array}$$

Si lavora qui con un elemento di tipo Eulero-Bernoulli

# ELEMENTI DI TELAIO NONLINEARI

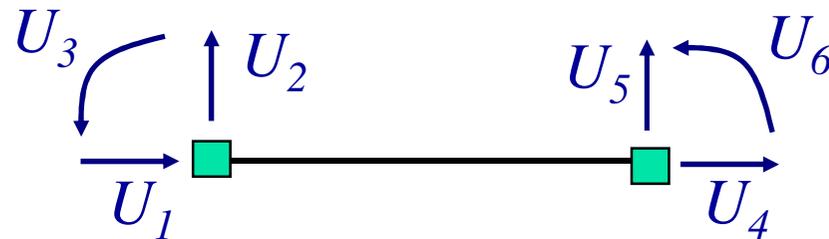
---

- **Elementi a Plasticità Concentrata**
  - Cerniera Plastica
    - ✓ Fenomenologica
    - ✓ Teoria della plasticità
    - ✓ A fibre
  
- **Elementi a Plasticità Distribuita**
  - **Formulazione in spostamenti**
  - Formulazione in forze
  - Integrazione numerica
  - Modelli di sezione (fenomenologici, teoria della plasticità, a fibre per entrambe le formulazioni)

# ELEMENTI A PLASTICITA' DISTRIBUITA

---

## Formulazione in spostamenti



Nell'elemento classico a due nodi, si fanno le seguenti ipotesi sui campi di spostamento

$$u(x) = \textit{lineare}$$

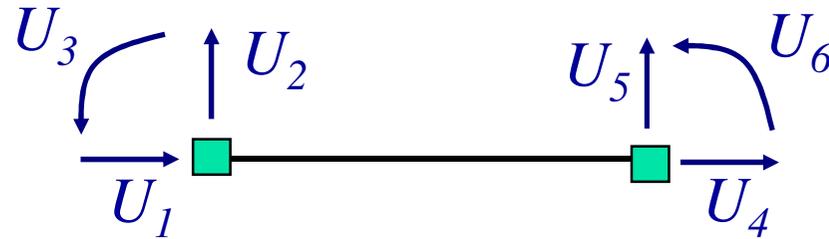
$$v(x) = \textit{cubico}$$

$$\mathbf{u}(x) = \mathbf{N}_U(x) \mathbf{U}^e$$

# ELEMENTI A PLASTICITA' DISTRIBUITA

---

## Formulazione in spostamenti



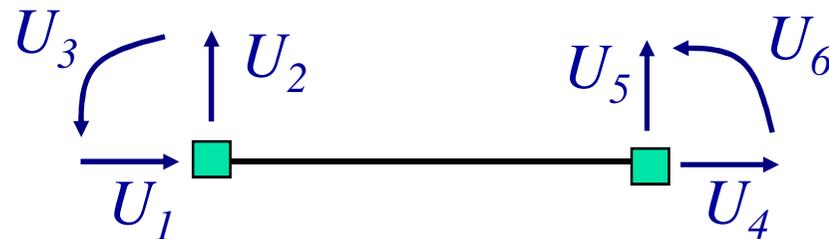
Ciò risulta nelle seguenti deformazioni di sezione

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^s(x) &= \begin{Bmatrix} \varepsilon_0 \\ \varphi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u'(x) \\ v''(x) \end{Bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{costante} \\ \text{lineare} \end{array} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} & 0 \\ 0 & \frac{d^2}{dx^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(x) \\ v(x) \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{d}{dx} & 0 \\ 0 & \frac{d^2}{dx^2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}(x)} \mathbf{N}_U(x) \mathbf{U}^e \end{aligned}$$

# ELEMENTI A PLASTICITA' DISTRIBUITA

---

## Formulazione in spostamenti



La **formulazione è approssimata** perché le equazioni differenziali della trave:

$$\frac{d}{dx} \left( EA \frac{du}{dx} \right) = 0 \qquad \frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2v}{dx^2} \right) = 0$$

ammettono soluzione

$$u(x) = \textit{lineare} \qquad v(x) = \textit{cubico}$$

solo nel caso di comportamento elastico lineare e sezione costante ( $EA = \text{const}$ ,  $EI = \text{const}$ ).

Nel caso di comportamento nonlineare, la soluzione è tanto più approx quanto maggiore è la nonlinearietà

# ELEMENTI A PLASTICITA' DISTRIBUITA

---

## Formulazione in spostamenti

$$\mathbf{e}^s(x) = \begin{Bmatrix} \varepsilon_0 \\ \varphi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u'(x) \\ v''(x) \end{Bmatrix} \quad \begin{array}{l} \textit{costante} \\ \textit{lineare} \end{array}$$

Le deformazioni di sezione si scrivono nella forma matriciale

$$\mathbf{e}^s(x) = \mathbf{B}(x) \mathbf{U}^e$$

$\mathbf{B}(x)$  e' la matrice delle funzioni di forma, che esprimono il fatto che  $\varepsilon_0 = \textit{costante}$  e  $\varphi = \textit{lineare}$

# ELEMENTI A PLASTICITA' DISTRIBUITA

---

## Formulazione in spostamenti

Serve il comportamento della sezione.  
Nel caso elastico lineare

$$\mathbf{s}^s(x) = \mathbf{k}^s(x) \mathbf{e}^s(x)$$

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix}}_{\mathbf{s}^s} = \underbrace{\begin{bmatrix} EA & 0 \\ 0 & EI \end{bmatrix}}_{\mathbf{k}^s} \underbrace{\begin{Bmatrix} \varepsilon_0 \\ \varphi \end{Bmatrix}}_{\mathbf{e}^s}$$

Nel caso nonlineare

$$d\mathbf{s}^s(x) = \mathbf{k}_{\tan}^s(x) d\mathbf{e}^s(x)$$

# ELEMENTI A PLASTICITA' DISTRIBUITA

---

## Formulazione in spostamenti (lineare)

Usando principi energetici si arriva alle seguenti espressioni di equilibrio

$$\mathbf{P}^e = \int_0^L \mathbf{B}^T(x) \mathbf{s}^s(x) dx$$

Forze  
dell'elemento

$$\mathbf{K}^e = \int_0^L \mathbf{B}^T(x) \mathbf{k}^s(x) \mathbf{B}(x) dx$$

Matrice di rigidezza  
dell'elemento

Le forze dell'elemento sono l'integrale pesato delle forze di sezione.

La matrice di rigidezza dell'elemento è l'integrale pesato delle rigidezze di sezione

# ELEMENTI A PLASTICITA' DISTRIBUITA

---

## Formulazione in spostamenti (nonlineare)

Equilibrio nella posizione  $\mathbf{U}^e$

$$\mathbf{P}^e = \int_0^L \mathbf{B}^T(x) \mathbf{s}^s(x) dx$$

$$\mathbf{K}_{\text{tan}}^e = \frac{d\mathbf{P}^e}{d\mathbf{U}^e} = \int_0^L \mathbf{B}^T(x) \frac{d\mathbf{s}^s}{d\mathbf{U}^e} dx = \int_0^L \mathbf{B}^T(x) \underbrace{\frac{d\mathbf{s}^s}{d\mathbf{e}^s}}_{\mathbf{k}_{\text{tan}}^s} \underbrace{\frac{d\mathbf{e}^s}{d\mathbf{U}^e}}_{\mathbf{B}} dx$$

$$\mathbf{K}_{\text{tan}}^e = \int_0^L \mathbf{B}^T(x) \mathbf{k}_{\text{tan}}^s(x) \mathbf{B}^T(x) dx$$

# ELEMENTI A PLASTICITA' DISTRIBUITA

---

## Formulazione in spostamenti (nonlineare)

Se  $\Delta \mathbf{U}^e$  è un incremento finito, allora rigidezza *secante*

$$\mathbf{k}^s = \mathbf{k}_{\text{sec}}^s = \frac{\Delta \mathbf{s}^s}{\Delta \mathbf{e}^s} \quad \Delta \mathbf{P}^e = \mathbf{K}_{\text{sec}}^e \Delta \mathbf{U}^e \quad \mathbf{K}_{\text{sec}}^e = \int_0^L \mathbf{B}^T \mathbf{k}_{\text{sec}}^s \mathbf{B} dx$$

# ELEMENTI A PLASTICITA' DISTRIBUITA

---

## Formulazione in spostamenti

## ELEMENT STATE DETERMINATION

GIVEN  $\mathbf{U}^e$

for  $h = 1, m$

$$\mathbf{e}_h^s = \mathbf{B}_h \mathbf{U}^e$$

SECTION STATE DETERMINATION  $\Rightarrow \mathbf{k}_h^s, \mathbf{s}_h^s$

$$\mathbf{P}^e = \sum_{h=1}^m \mathbf{B}_h^T \mathbf{s}_h^s w_h L$$

$$\mathbf{K}^e = \sum_{h=1}^m \mathbf{B}_h^T \mathbf{k}_h^s \mathbf{B}_h w_h L$$

*next*

# ELEMENTI A PLASTICITA' DISTRIBUITA

---

## Formulazione in spostamenti

### Limiti della formulazione

$$\mathbf{P}^e = \int_0^L \mathbf{B}^T(x) \mathbf{s}^s(x) dx$$

$$\mathbf{K}^e = \int_0^L \mathbf{B}^T(x) \mathbf{k}^s(x) \mathbf{B}(x) dx$$

Le  $\mathbf{B}(x)$  impongono campi costante per le deformazioni assiali  $\varepsilon_0$  e lineare per le curvature  $\varphi$ . Questo costituisce una approssimazione nel caso di comportamento nonlineare del materiale



**Formulazione approssimata**

# ELEMENTI A PLASTICITA' DISTRIBUITA

---

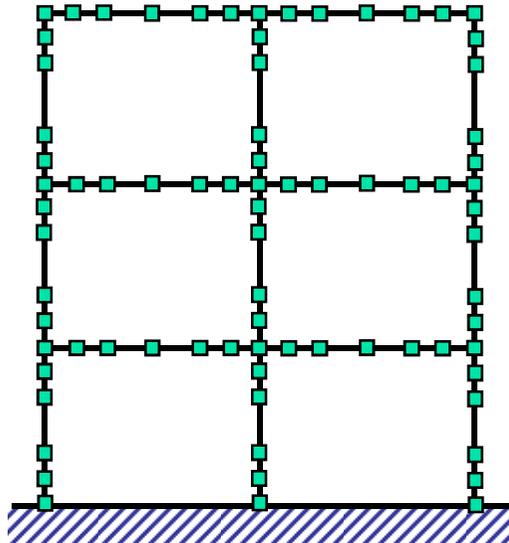
## Formulazione in spostamenti

- Gli elementi sono approssimati nel caso di comportamento materiale nonlineare
- Non esistono elementi + sofisticati che funzionino veramente bene
- Bisogna infittire la mesh, cioè usare + di un elemento / trave o colonna, come si fa di routine con qualunque altra mesh agli EF
- Quanti elementi?

# ELEMENTI A PLASTICITA' DISTRIBUITA

---

## Formulazione in spostamenti



- Si cerca di infittire la mesh nei punti di maggiore nonlinearietà
- Alcuni programmi seguono procedure di remesh adattativa
- Possibili problemi di localizzazione delle deformazioni

# ELEMENTI DI TELAIO NONLINEARI

---

## □ Elementi a Plasticità Concentrata

### ■ Cerniera Plastica

- ✓ Fenomenologica
- ✓ Teoria della plasticità
- ✓ A fibre

## □ Elementi a Plasticità Distribuita

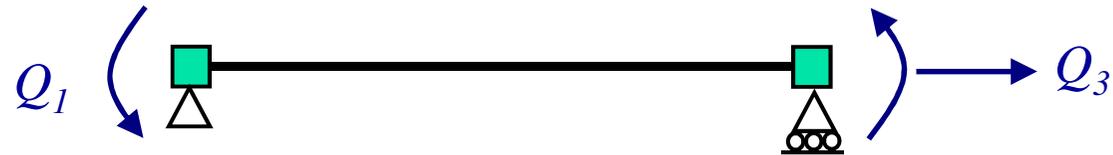
- Formulazione in spostamenti
- **Formulazione in forze**
- Integrazione numerica
- Modelli di sezione (fenomenologici, teoria della plasticità, a fibre per entrambe le formulazioni)

# ELEMENTI A PLASTICITA' DISTRIBUITA

---

## Formulazione in forze

Elemento senza modi rigidi



TRAVE DI EULERO-BERNOULLI

$$\mathbf{s}^s(x) = \begin{Bmatrix} N(x) \\ M(x) \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{e}^s(x) = \begin{Bmatrix} \varepsilon_0(x) \\ \kappa(x) \end{Bmatrix}$$

TRAVE DI TIMOSHENKO

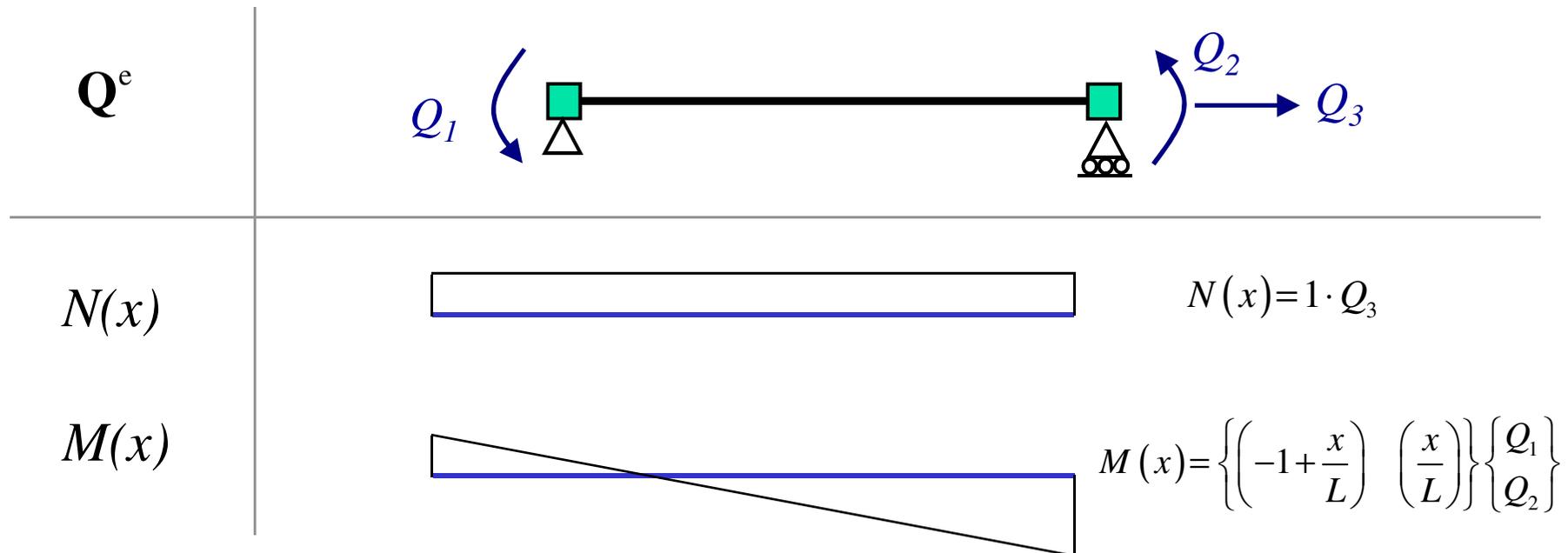
$$\mathbf{s}^s(x) = \begin{Bmatrix} N(x) \\ M(x) \\ V(x) \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{e}^s(x) = \begin{Bmatrix} \varepsilon_0(x) \\ \kappa(x) \\ \gamma(x) \end{Bmatrix}$$

# ELEMENTI A PLASTICITA' DISTRIBUITA

## Formulazione in forze

### TRAVE DI EULERO-BERNOULLI



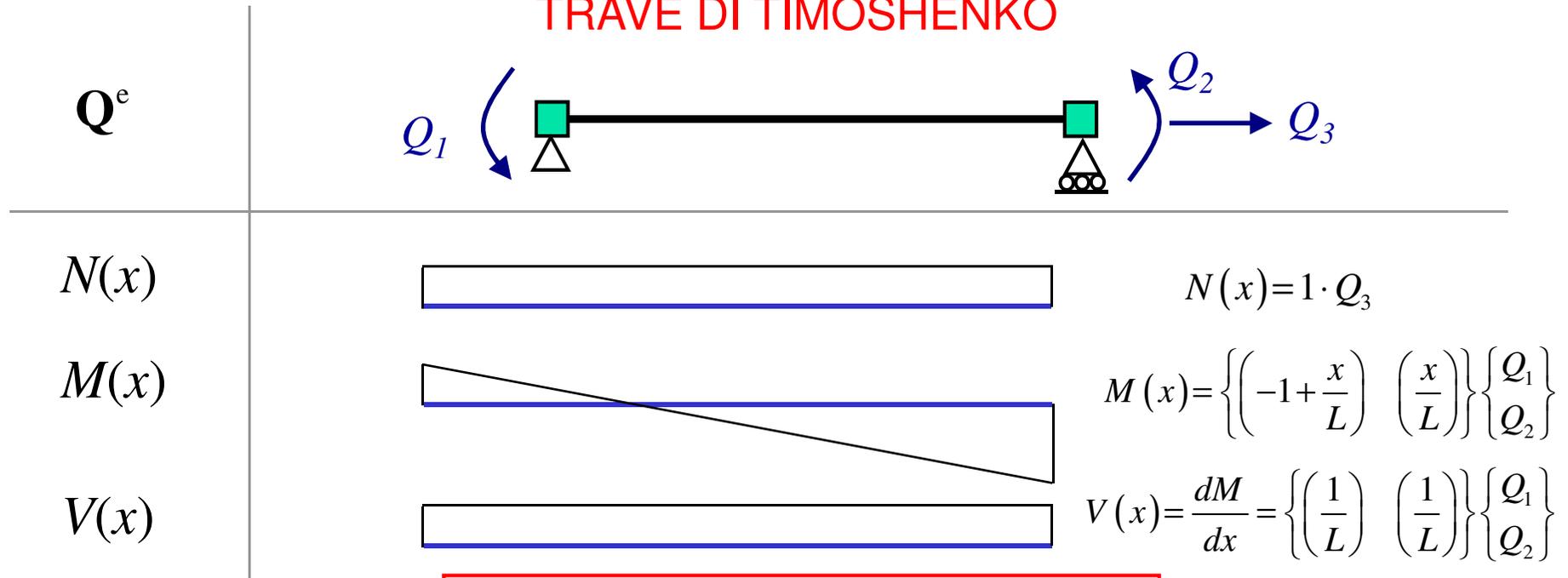
“Esatto”

$$s^s(x) = \begin{Bmatrix} N(x) \\ M(x) \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 + \frac{x}{L} & \frac{x}{L} & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}_Q(x)} \underbrace{\begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{Q}^e} = \mathbf{N}_Q(x) \mathbf{Q}^e$$

# ELEMENTI A PLASTICITA' DISTRIBUITA

## Formulazione in forze

### TRAVE DI TIMOSHENKO



“Esatto”

$$\mathbf{s}^s(x) = \begin{Bmatrix} N(x) \\ M(x) \\ V(x) \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 + \frac{x}{L} & \left(\frac{x}{L}\right) & 0 \\ \left(\frac{1}{L}\right) & \left(\frac{1}{L}\right) & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}_Q(x)} \underbrace{\begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{Q}^e} = \mathbf{N}_Q(x) \mathbf{Q}^e$$

## Formulazione in forze

$$\mathbf{s}^s(x) = \begin{cases} N(x) \\ M(x) \end{cases} \begin{matrix} \textit{costante} \\ \textit{lineare} \end{matrix}$$

140

Questi campi sono “**esatti**” **indipendentemente dal comportamento materiale delle sezioni** per elementi con carichi solo nodali. Le forze di sezione si scrivono nella forma

$$\mathbf{s}^s(x) = \mathbf{N}_Q(x) \mathbf{Q}^e$$

$\mathbf{N}_Q(x)$  e' la matrice delle funzioni di forma in forze, che esprimono il fatto che  $N = \text{costante}$  e  $M = \text{lineare}$ .

# ELEMENTI A PLASTICITA' DISTRIBUITA

---

## Formulazione in forze

Serve il comportamento della sezione.  
Nel caso elastico lineare

$$\mathbf{e}^s(x) = \mathbf{f}^s(x) \mathbf{s}^s(x)$$

Nel caso nonlineare

$$d\mathbf{e}^s(x) = \mathbf{f}_{\tan}^s(x) ds^s(x)$$

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \varphi \end{Bmatrix}}_{\mathbf{e}^s} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{EA} & 0 \\ 0 & \frac{1}{EI} \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}^s} \underbrace{\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix}}_{\mathbf{s}^s}$$

# ELEMENTI A PLASTICITA' DISTRIBUITA

---

## Formulazione in forze (caso lineare)

Usando principi energetici si arriva alle seguenti espressioni di congruenza

$$\mathbf{q}^e = \int_0^L \mathbf{N}_Q^T(x) \mathbf{e}^s(x) dx$$

Deformazioni nodali dell'elemento

$$\mathbf{f}^e = \int_0^L \mathbf{N}_Q^T(x) \mathbf{f}^s(x) \mathbf{N}_Q(x) dx$$

Matrice di flessibilità dell'elemento

Le deformazioni nodali dell'elemento sono l'integrale pesato delle deformazioni di sezione.

La matrice di flessibilità dell'elemento è l'integrale pesato delle flessibilità di sezione

# ELEMENTI A PLASTICITA' DISTRIBUITA

---

## Formulazione in forze (caso nonlineare)

$$\mathbf{q}^e = \int_0^L \mathbf{N}_Q^T(x) \mathbf{e}^s(x) dx$$

$$\mathbf{f}_{\text{tan}}^e = \frac{d\mathbf{q}^e}{d\mathbf{Q}^e} = \int_0^L \mathbf{N}_Q^T(x) \frac{d\mathbf{e}^s}{d\mathbf{Q}^e} dx = \int_0^L \mathbf{N}_Q^T(x) \underbrace{\frac{d\mathbf{e}^s}{ds^s}}_{\mathbf{f}_{\text{tan}}^s} \underbrace{\frac{ds^s}{d\mathbf{Q}^e}}_{\mathbf{N}_Q} dx$$

$$\mathbf{f}_{\text{tan}}^e = \int_0^L \mathbf{N}_Q^T(x) \mathbf{f}_{\text{tan}}^s \mathbf{N}_Q(x) dx$$

# ELEMENTI A PLASTICITA' DISTRIBUITA

---

## Formulazione in forze

$$\mathbf{q}^e = \int_0^L \mathbf{N}_Q^T(x) \mathbf{e}^s(x) dx$$

$$\mathbf{f}^e = \int_0^L \mathbf{N}_Q^T(x) \mathbf{f}^s(x) \mathbf{N}_Q(x) dx$$

Le  $\mathbf{N}_Q^T(x)$  impongono campi costante per lo sforzo assiale  $N$  e lineare per i momenti  $M$ . Queste assunzioni sono sempre esatte nel quadro della teoria della trave, indipendentemente dal comportamento materiale

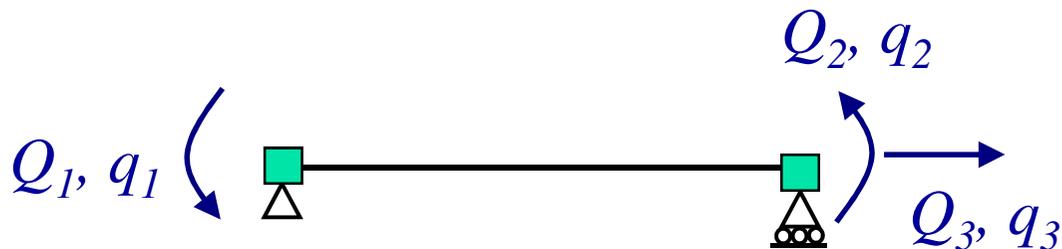
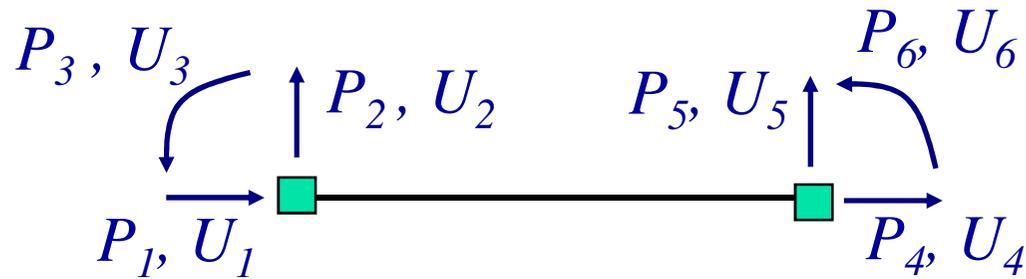


**Elemento “esatto”**

# ELEMENTI A PLASTICITA' DISTRIBUITA

## Formulazione in forze

Dopo aver calcolato  $\mathbf{Q}^e$  e  $\mathbf{f}^e$



$$\begin{array}{c} \mathbf{P}^e, \mathbf{K}^e \\ \uparrow \\ \mathbf{P}^e = \mathbf{\Gamma}_{\text{RBM}}^T \mathbf{Q}^e \\ \mathbf{K}^e = \mathbf{\Gamma}_{\text{RBM}}^T \mathbf{k}^e \mathbf{\Gamma}_{\text{RBM}} \\ \uparrow \\ \mathbf{Q}^e, \mathbf{k}^e \end{array}$$

# ELEMENTI A PLASTICITA' DISTRIBUITA

---

## Formulazione in forze

- La formulazione è esatta
- VANTAGGI principali
  - basta usare un elemento/trave o pilastro
  - la formulazione permette di trattare anche il softening (importante per analisi fino allo SL-CO)
- SVANTAGGI principali
  - L'implementazione in un programma di calcolo è piuttosto complicato (richiede iterazioni)
  - Disponibile al momento in pochi programmi commerciali

# ELEMENTI DI TELAIO NONLINEARI

---

- **Elementi a Plasticità Concentrata**
  - Cerniera Plastica
    - ✓ Fenomenologica
    - ✓ Teoria della plasticità
    - ✓ A fibre
  
- **Elementi a Plasticità Distribuita**
  - Formulazione in spostamenti
  - Formulazione in forze
  - **Integrazione numerica**
  - Modelli di sezione (fenomenologici, teoria della plasticità, a fibre per entrambe le formulazioni)

# ELEMENTI A PLASTICITA' DISTRIBUITA

---

## Integrazione Numerica

### Formulazione in spostamenti

$$\mathbf{P}^e = \int_0^L \mathbf{B}^T(x) \mathbf{s}^s(x) dx \quad \mathbf{K}^e = \int_0^L \mathbf{B}^T(x) \mathbf{k}^s(x) \mathbf{B}(x) dx$$

### Formulazione in forze

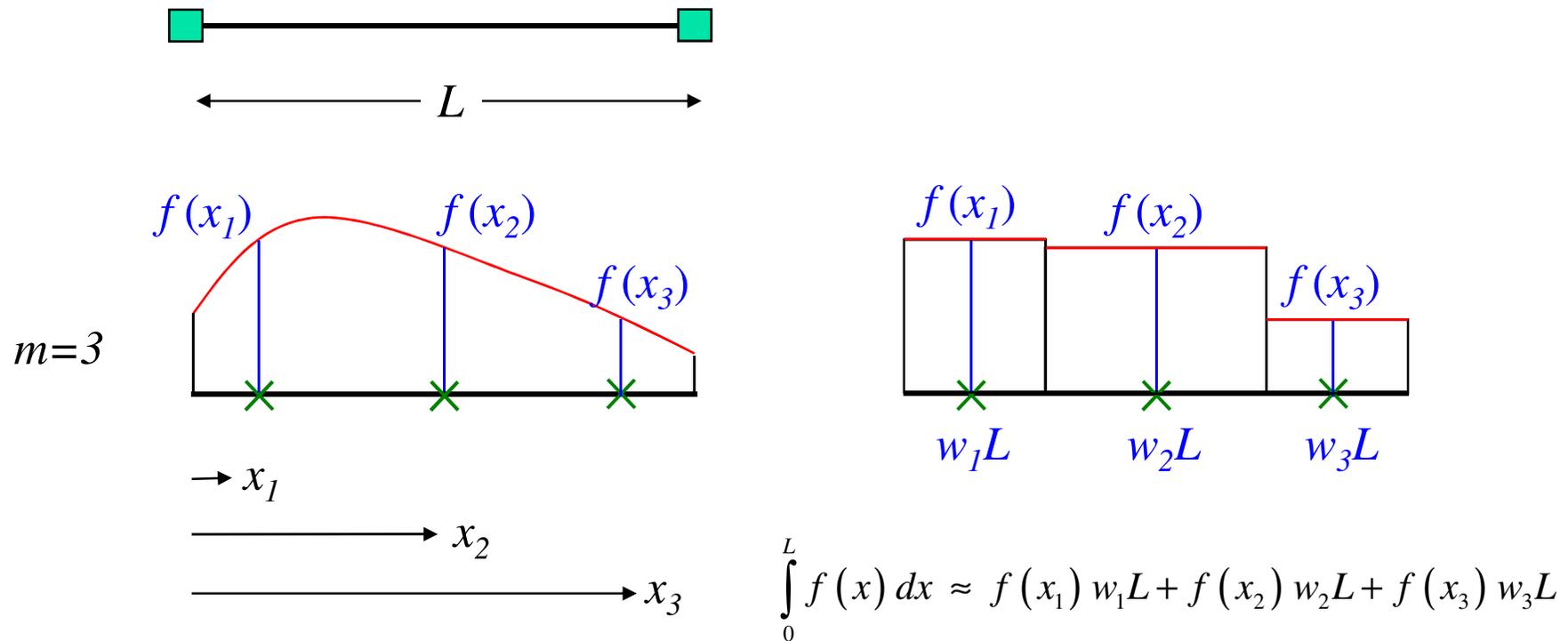
$$\mathbf{q}^e = \int_0^L \mathbf{N}_Q^T(x) \mathbf{e}^s(x) dx \quad \mathbf{Q}^e = \int_0^L \mathbf{N}_Q^T(x) \mathbf{f}^s(x) \mathbf{N}_Q(x) dx$$

gli integrali elementi sono risolti attraverso **integrazione numerica**

# ELEMENTI A PLASTICITA' DISTRIBUITA

## Integrazione Numerica

$$\int_0^L f(x) dx \approx \sum_{h=1}^m f(x_h) w_h L$$





# ELEMENTI A PLASTICITA' DISTRIBUITA

---

## Integrazione Numerica

### Formulazione in spostamenti

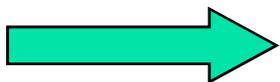
$$\mathbf{P}^e = \int_0^L \mathbf{B}^T(x) \mathbf{s}^s(x) dx \approx \sum_{h=1}^m \mathbf{B}^T(x_h) \mathbf{s}^s(x_h) w_h L$$

$$\mathbf{K}^e = \int_0^L \mathbf{B}^T(x) \mathbf{k}^s(x) \mathbf{B}(x) dx \approx \sum_{h=1}^m \mathbf{B}^T(x_h) \mathbf{k}^s(x_h) \mathbf{B}(x_h) w_h L$$

### Formulazione in forze

$$\mathbf{q}^e = \int_0^L \mathbf{N}_Q^T(x) \mathbf{e}^s(x) dx \approx \sum_{h=1}^m \mathbf{N}_Q^T(x_h) \mathbf{e}^s(x_h) w_h L$$

$$\mathbf{Q}^e = \int_0^L \mathbf{N}_Q^T(x) \mathbf{f}^s(x) \mathbf{N}_Q(x) dx \approx \sum_{h=1}^m \mathbf{N}_Q^T(x_h) \mathbf{f}^s(x_h) \mathbf{N}_Q(x_h) w_h L$$



monitoraggio  $h=1, m$  sezioni in posizione  $x_h$

## Integrazione Numerica

Un problema legato all'integrazione numerica e/o alla dimensione dell'Elemento Finito (Elemento Telaio nel nostro caso) è quello della **localizzazione delle deformazione** e della **perdita di oggettività** della risposta, particolarmente importante in elementi con comportamento con perdita di resistenza (cls a compressione oltre il picco di resistenza)



# ELEMENTI DI TELAIO NONLINEARI

---

- **Elementi a Plasticità Concentrata**
  - Cerniera Plastica
    - ✓ Fenomenologica
    - ✓ Teoria della plasticità
    - ✓ A fibre
  
- **Elementi a Plasticità Distribuita**
  - Formulazione in spostamenti
  - Formulazione in forze
  - Integrazione numerica
  - **Modelli di sezione (fenomenologici, teoria della plasticità, a fibre per entrambe le formulazioni)**

## Modelli di sezione

- Si possono usare gli stessi modelli che si usano per le cerniere plastiche.
  - Legge Fenomenologica
  - Legge di Sezione basata sulla Teoria della plasticità
  - Sezione a fibre

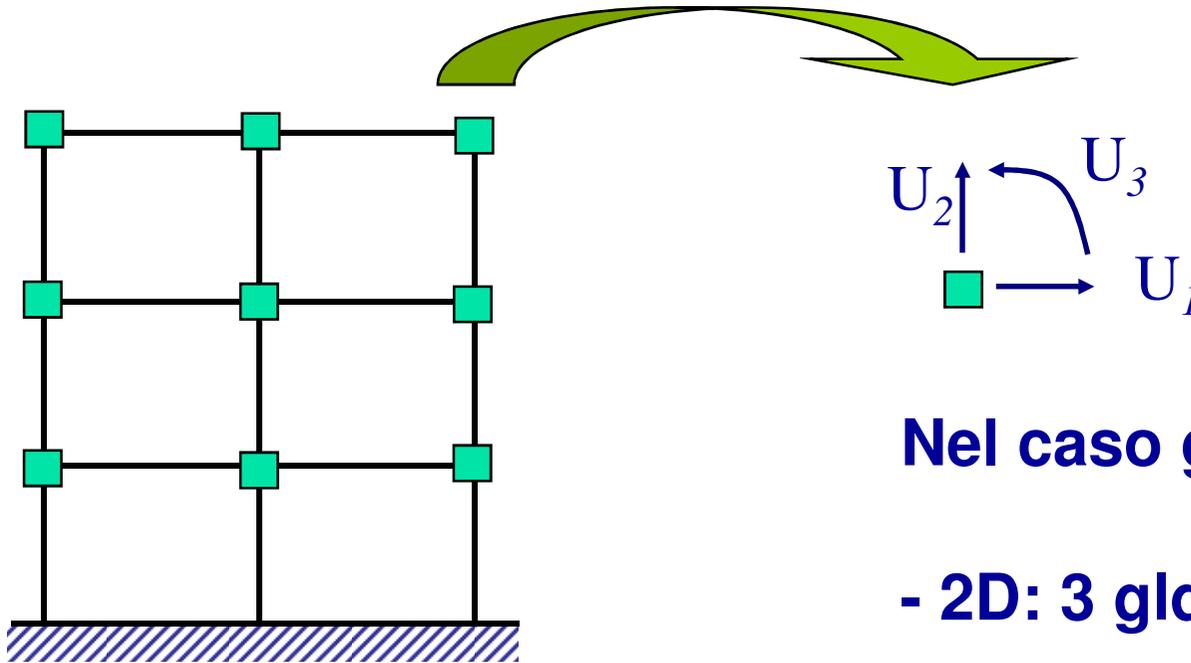
**Grosso sviluppo di software nel futuro prossimo**

# SOMMARIO

---

- **Livelli di analisi**
- **Algoritmi per le analisi dinamiche nonlineari**
- **Modelli di telai nonlineari**

**FINE**



**Nel caso generale:**

**- 2D: 3 gdl/nodo**

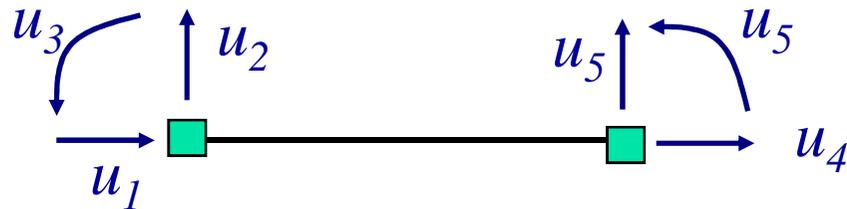
**- 3D: 6 gdl/nodo**

**Solitamente 1 nodo /  
nodo strutturale**

**rigid end zones?**

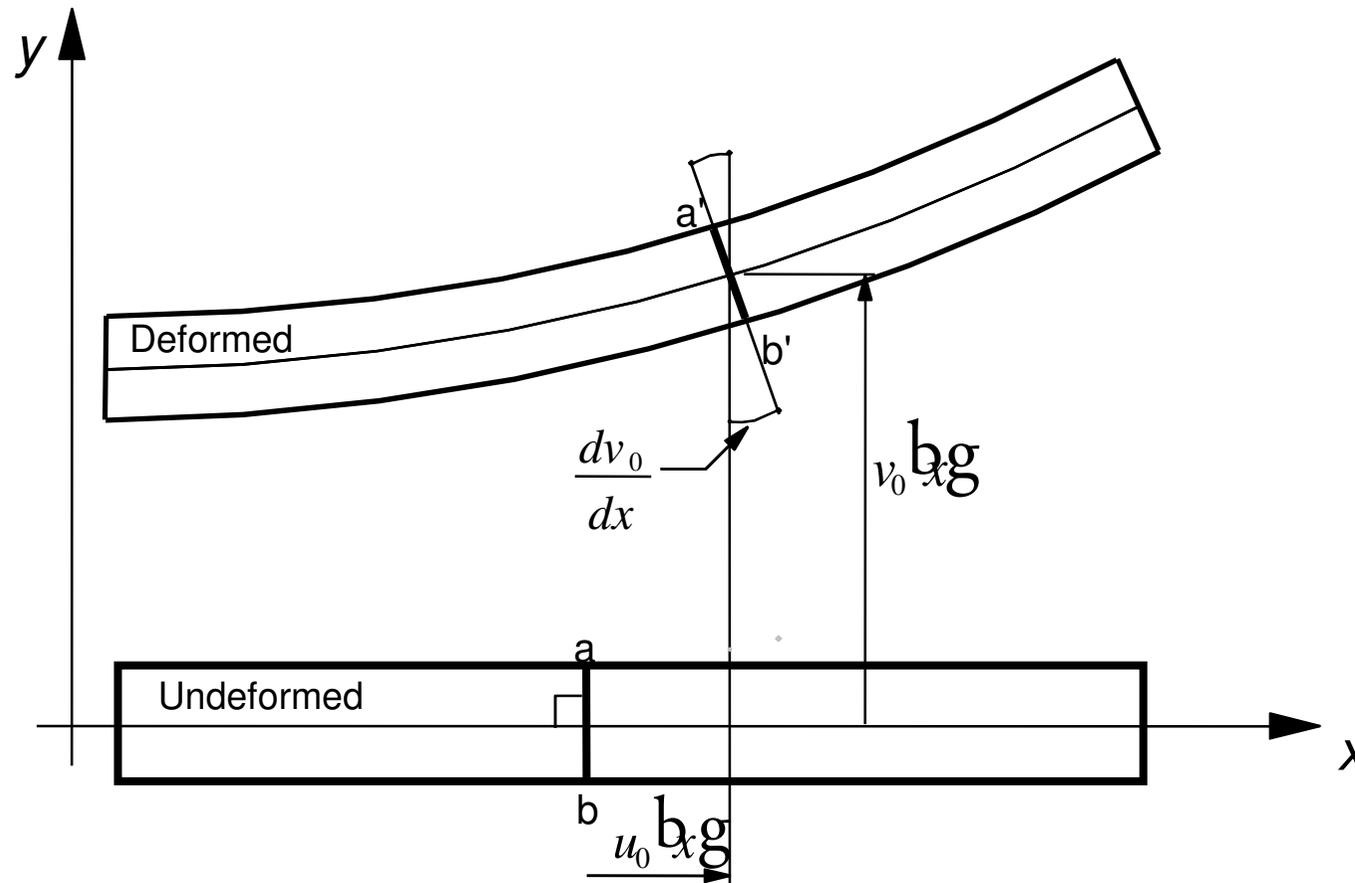


## Elemento telaio tipo



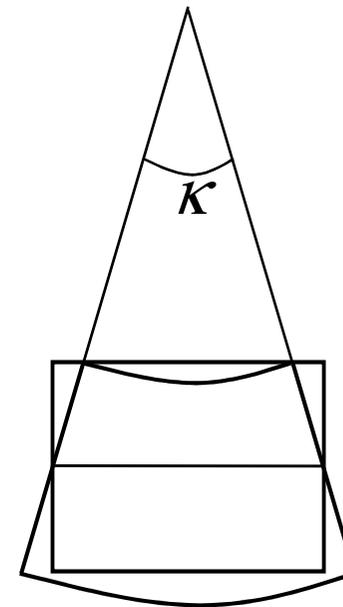
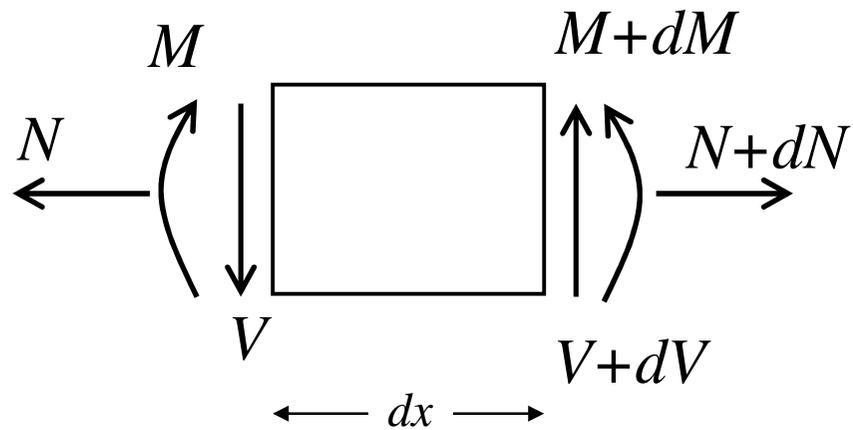
## Formulazioni base

- a) Trave di Eulero-Bernoulli  
(solo deformazioni assiali e flessionali)
- b) Trave di Timoshenko  
(def. assiali, flessionali e a taglio)



**Assunzione base:** Sezioni piane rimangono piane e normali all'asse della trave

Hp: non ci sono carichi distribuiti



Deformata della sezione a flessione

## Equazioni differenziali del problema

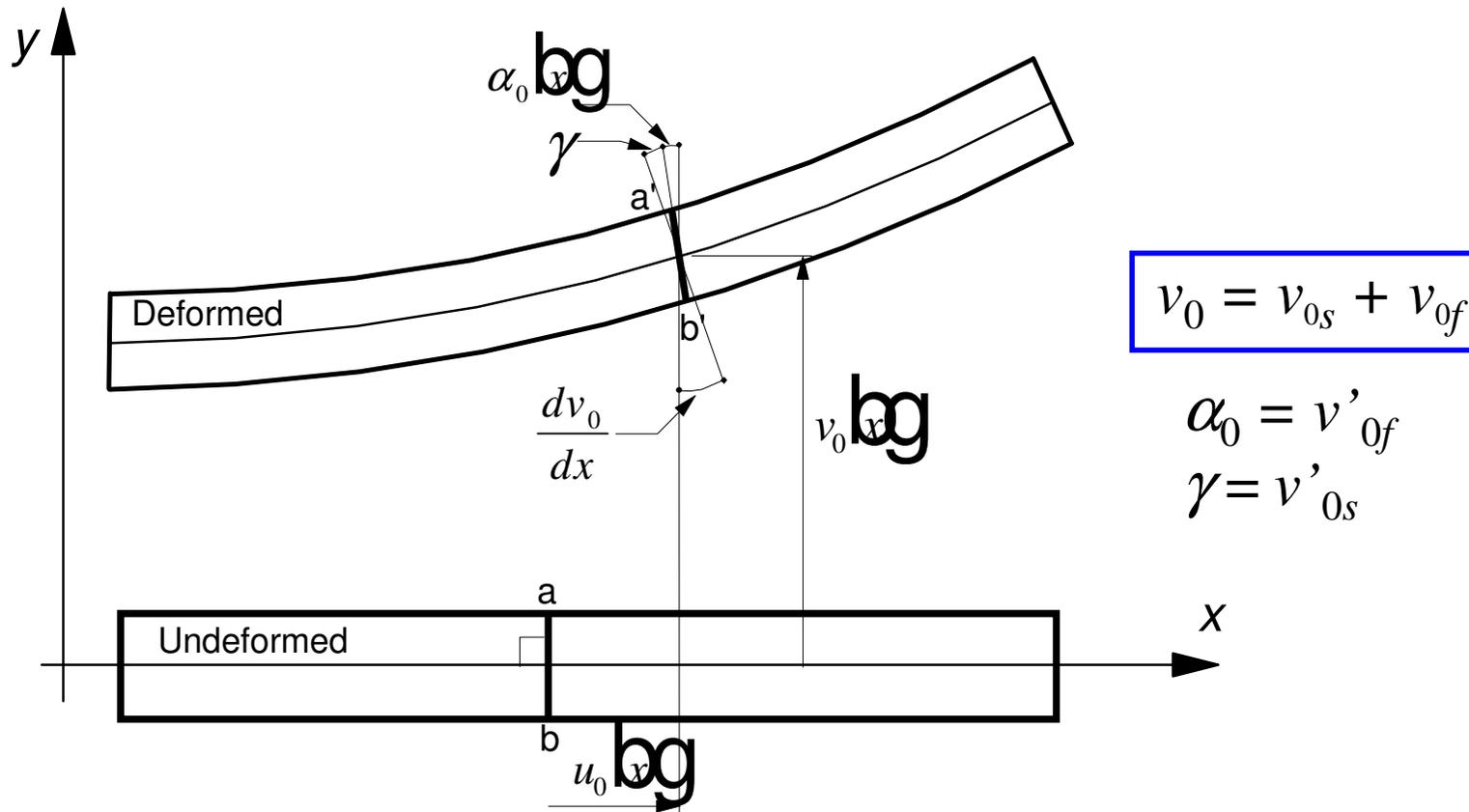
$$\frac{d}{dx} \left[ EA(x) \frac{du}{dx} \right] = 0$$
$$\frac{d^2}{dx^2} \left[ EI(x) \frac{d^2 v_0}{dx^2} \right] = 0$$

$$EA(x) = \text{const}$$

$$EI(x) = \text{const}$$

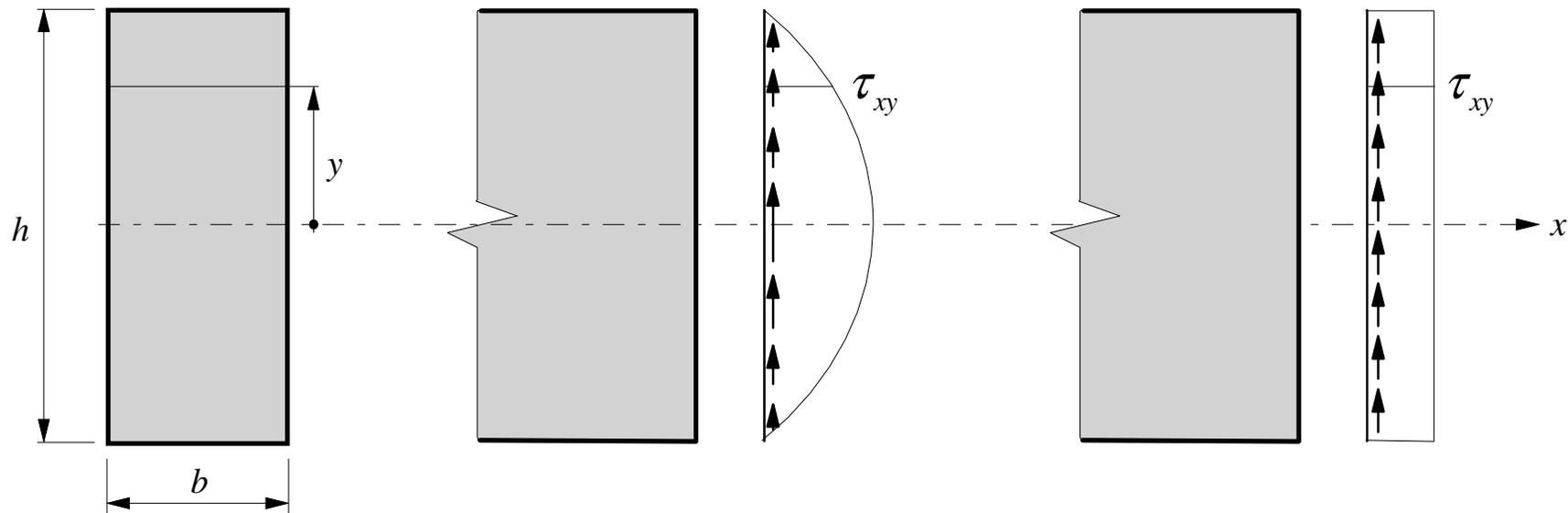
$$\frac{d^2 u}{dx^2} = 0$$
$$\frac{d^4 v}{dx^4} = 0$$

$$u_{\text{esatto}} = \text{polinomio lineare}$$
$$v_{\text{esatto}} = \text{polinomio cubico}$$



**Assunzione base:** Sezioni piane rimangono piane ma non normali all'asse della trave

## TENSIONI TANGENZIALI SU UNA SEZIONE CIRCOLARE

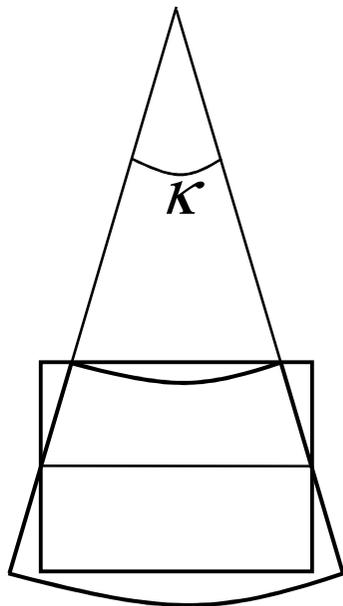


$$\tau_{xy} = \frac{6V}{bh^3} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

Teoria "Esatta"

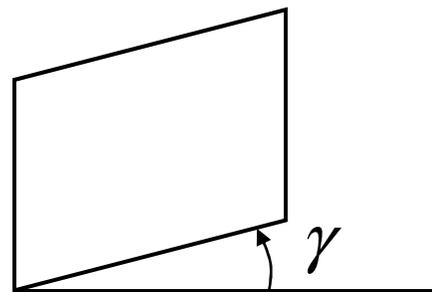
$$\tau_{xy} = \text{const} = \frac{V}{GA_s}$$

Teoria della  
Trave di Timoshenko



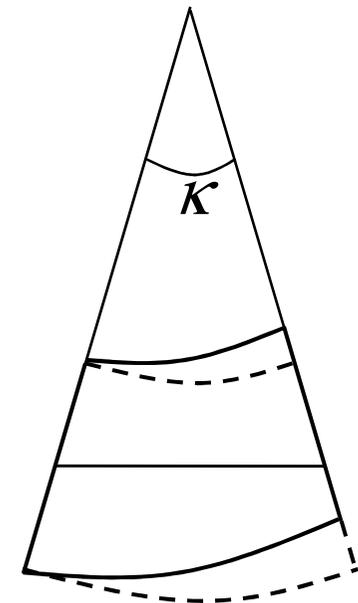
deformazione a flessione

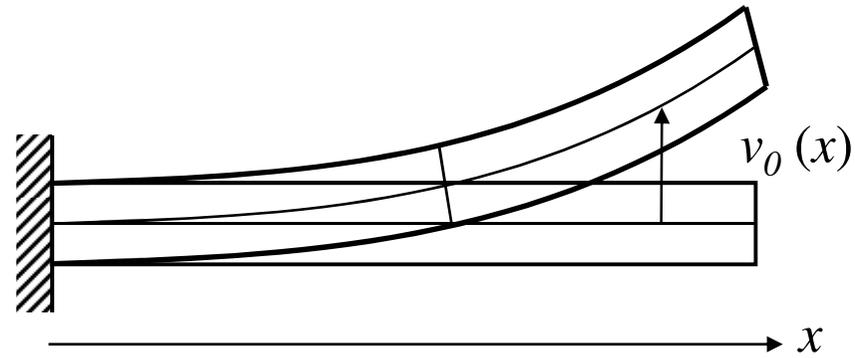
+



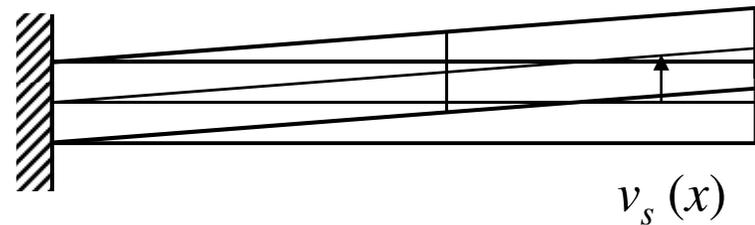
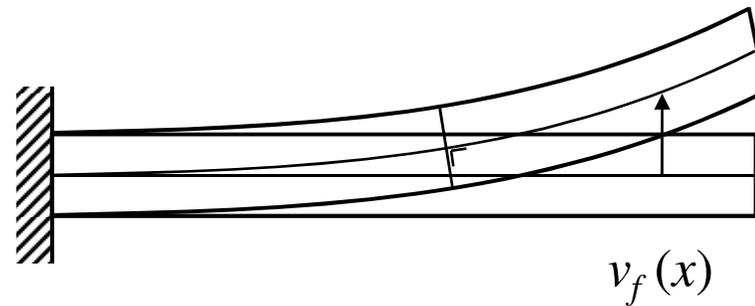
deformazione a taglio

=





$$v_0(x) = v_f(x) + v_s(x)$$



## Equazioni differenziali del problema

$$\frac{d}{dx} \left[ EA(x) \frac{du}{dx} \right] = 0$$
$$\frac{d}{dx} \left( GA_s \left( \frac{dv_0}{dx} - \alpha_0 \right) \right) = 0$$
$$GA_s \left( \frac{dv_0}{dx} - \alpha_0 \right) + \frac{d}{dx} \left( EI \frac{d\alpha_0}{dx} \right) = 0$$

$$EA(x) = \text{const}$$

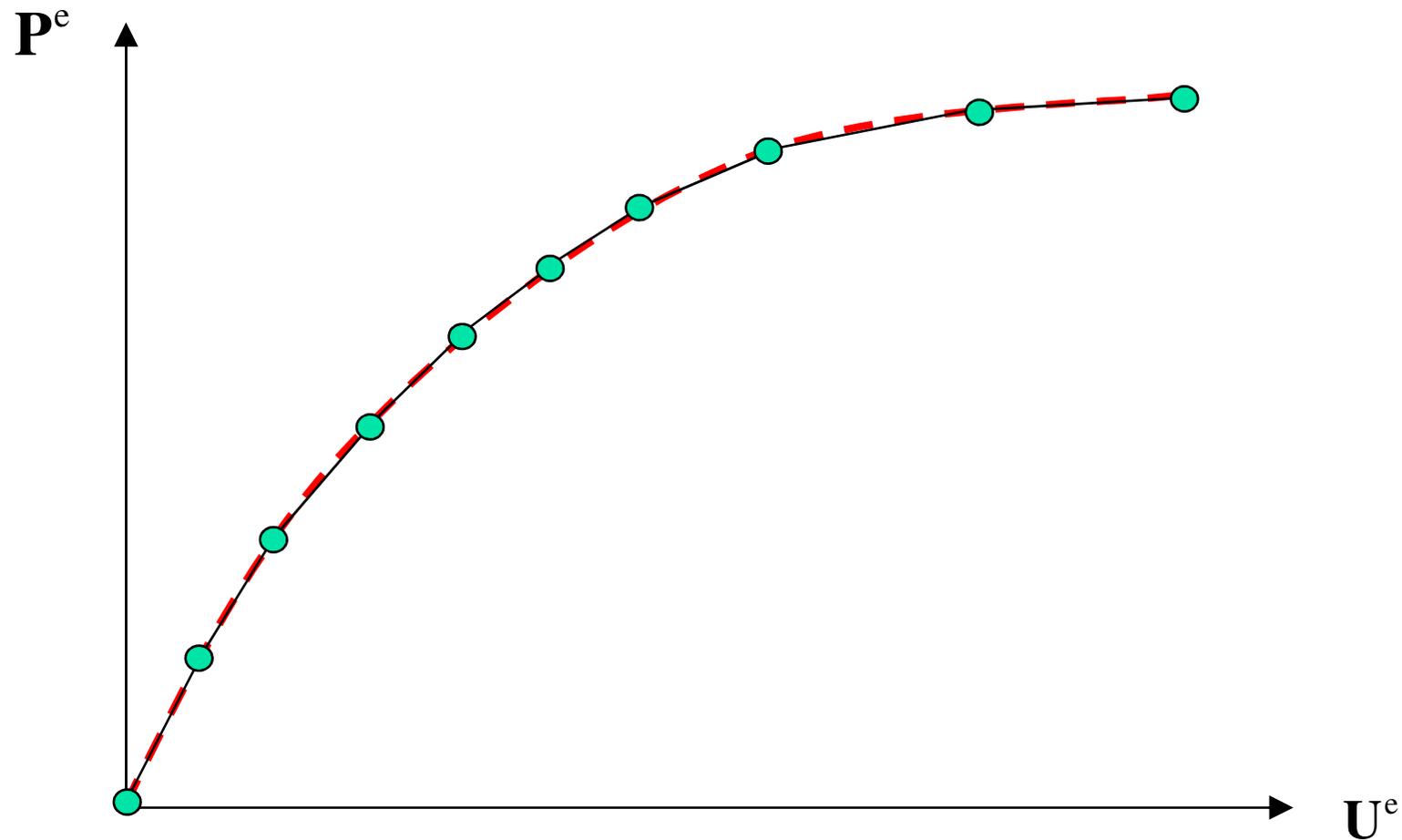
$$EI(x) = \text{const}$$

$$GA_s(x) = \text{const}$$

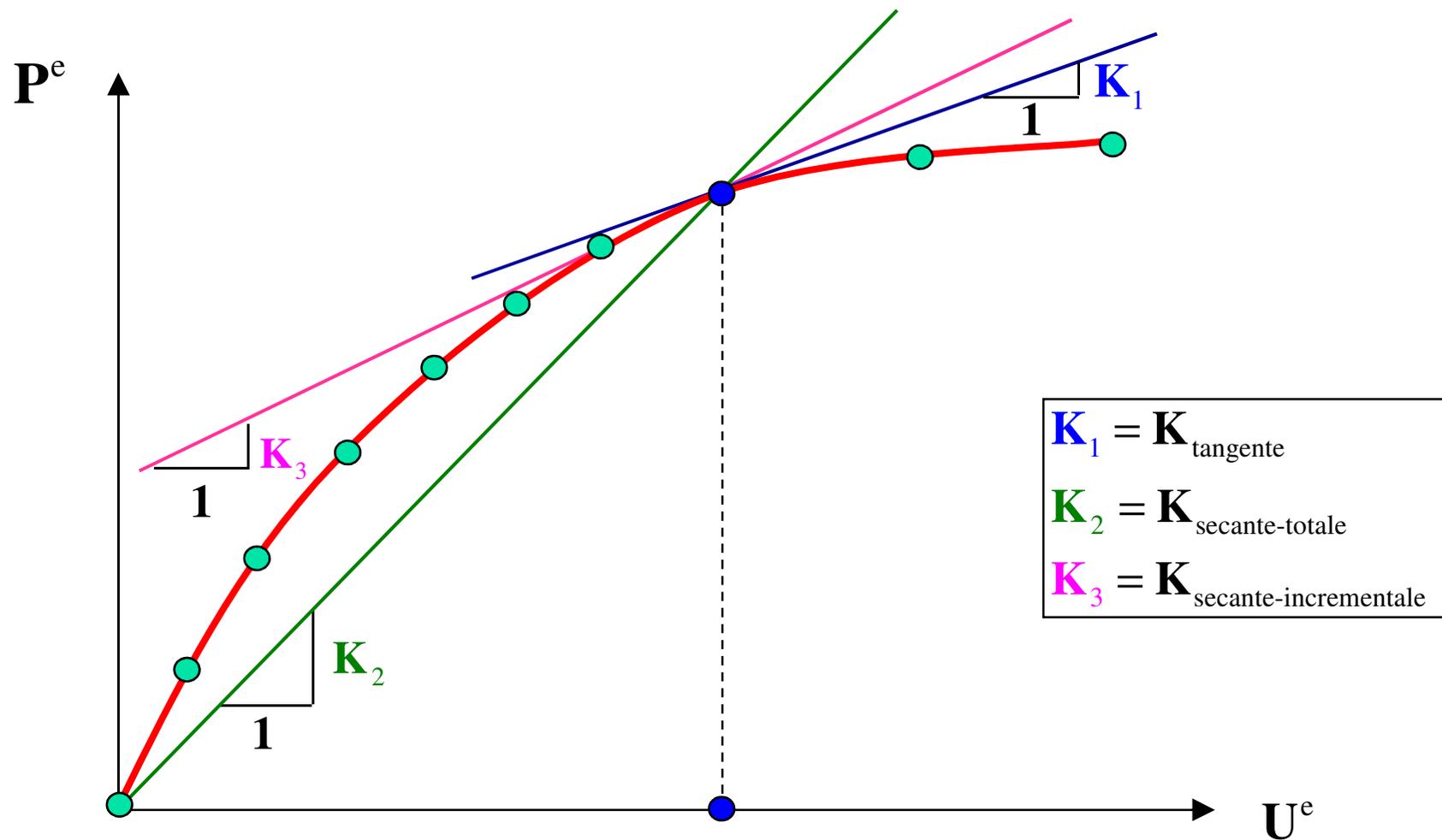
$$\frac{d^2 u}{dx^2} = 0$$
$$\frac{d^2 v_0}{dx^2} - \frac{d\alpha_0}{dx} = 0$$
$$GA_s \left( \frac{dv_0}{dx} - \alpha_0 \right) + EI \frac{d^2 \alpha_0}{dx^2} = 0$$

$$u_{\text{esatto}} = \text{polinomio lineare}$$
$$v_{\text{esatto}} = ?$$
$$\alpha_{\text{esatto}} = ?$$

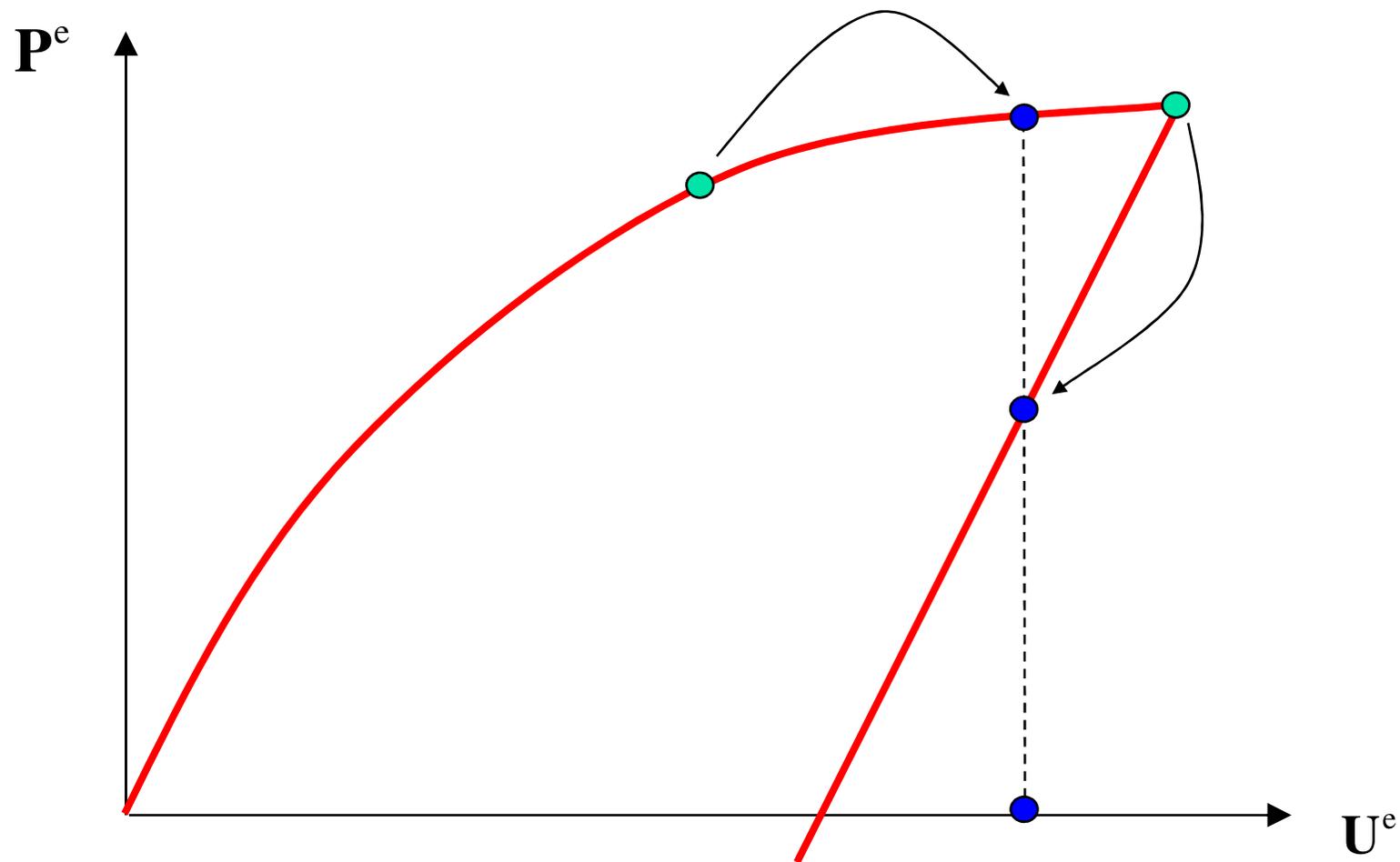
**La curva viene calcolata solo per punti**

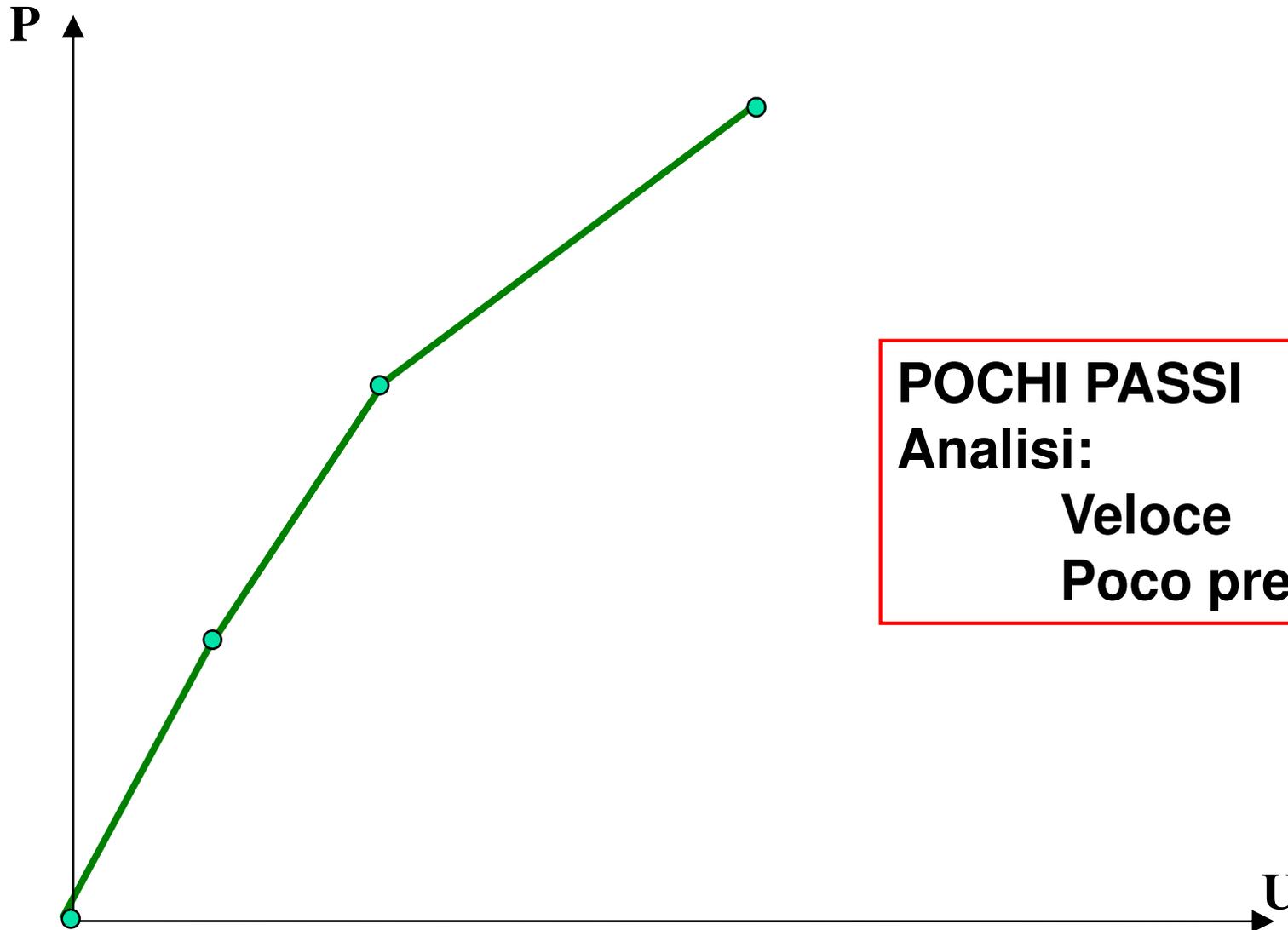


## Quale rigidezza per un dato valore di $U^e$ ?

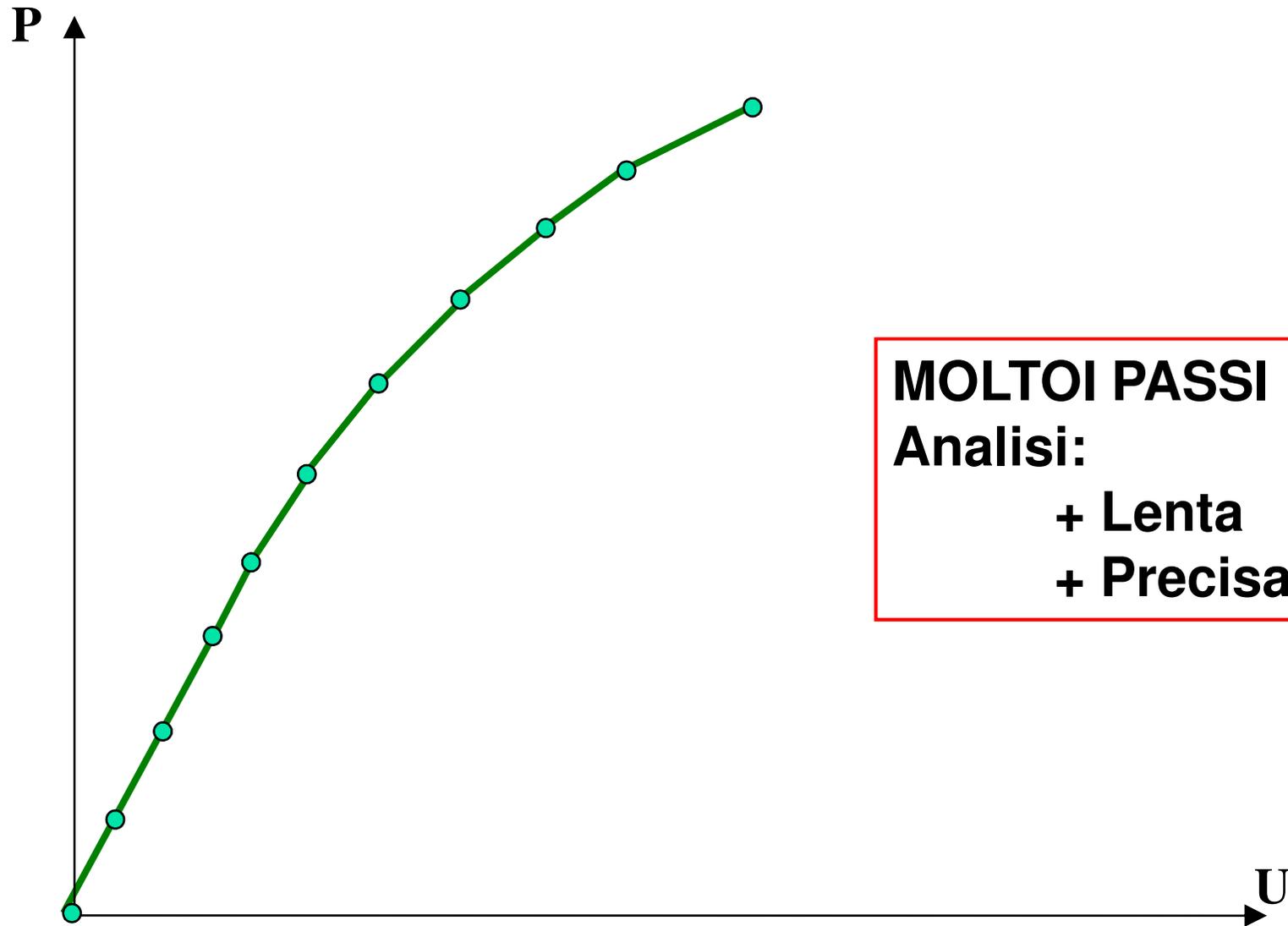


## La risposta dipende dalla storia di carico

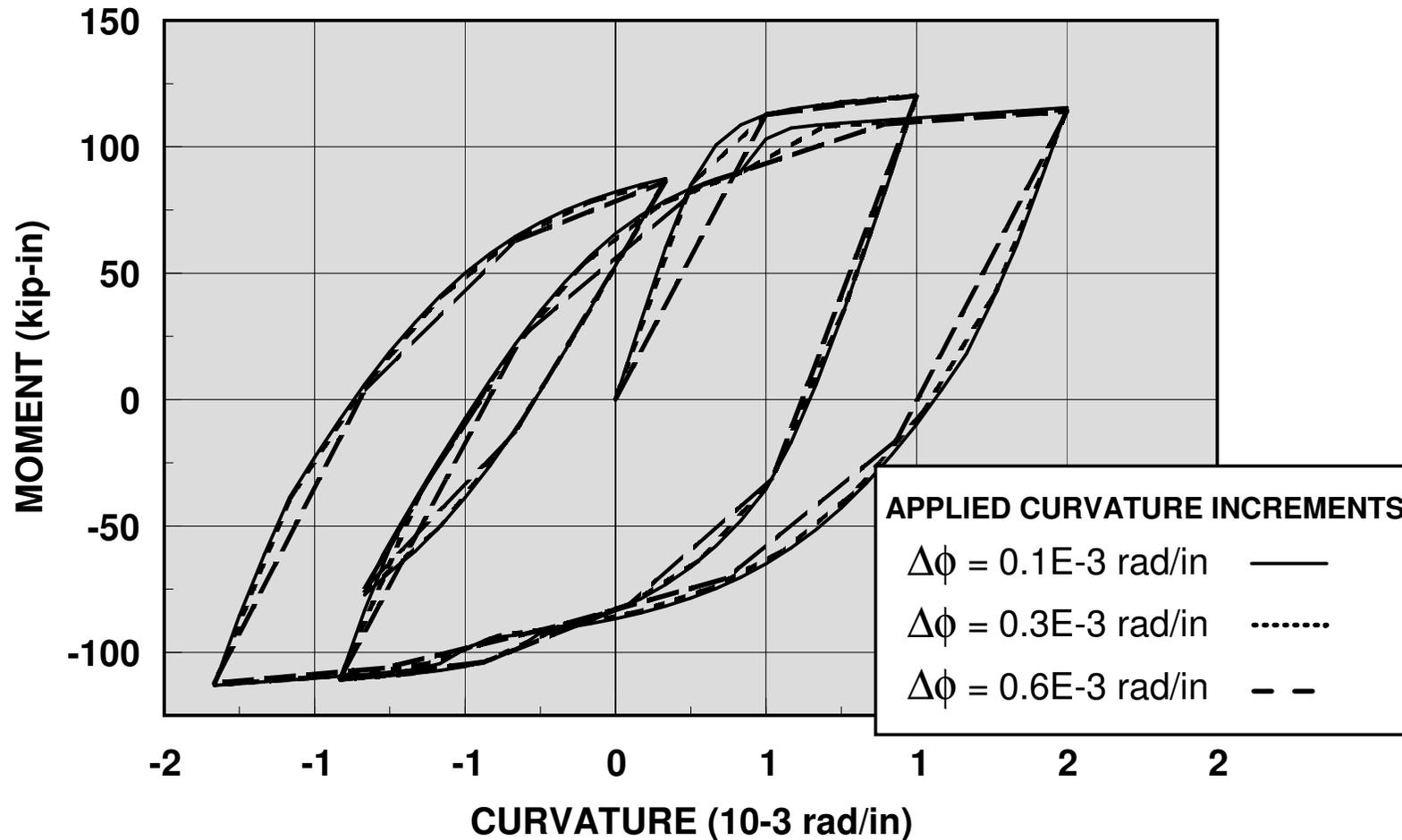




**POCHI PASSI**  
**Analisi:**  
**Veloce**  
**Poco precisa**



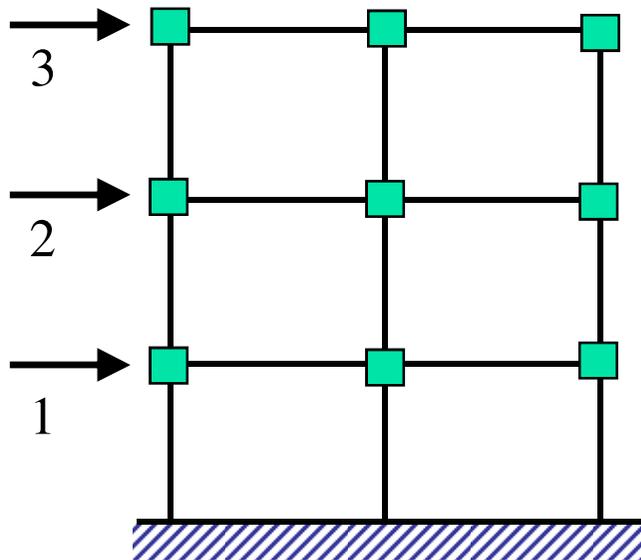
**MOLTOI PASSI**  
**Analisi:**  
+ Lenta  
+ Precisa



## Esempio Analisi Sezione: Importanza passo analisi

Esistono molte maniere per definire una storia di carico  
Esempio

## Definizione carico di riferimento

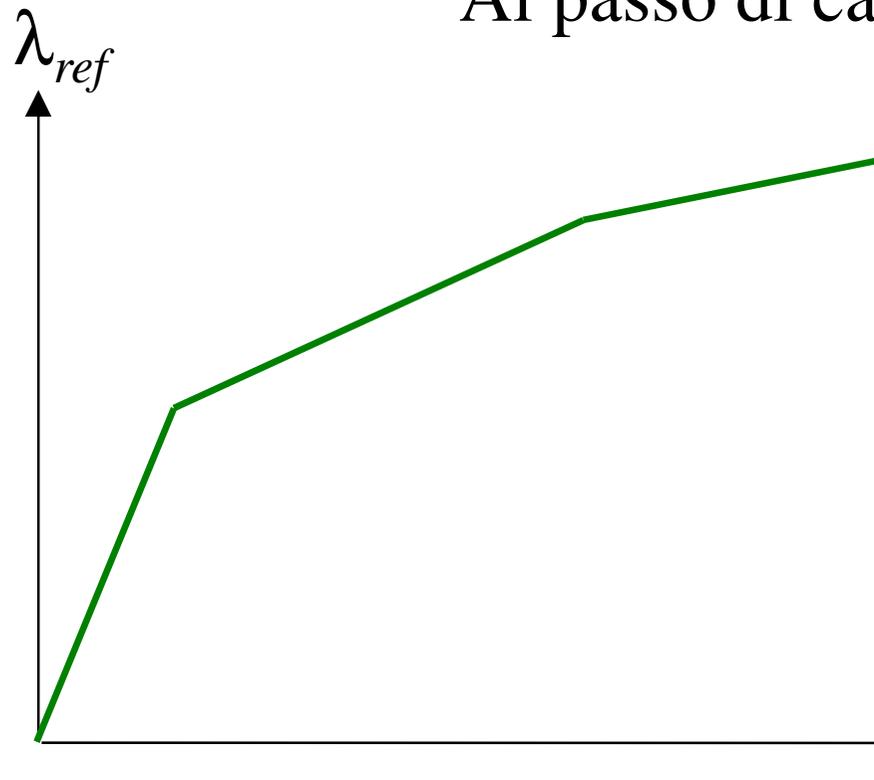


$$\mathbf{P}_{ref} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

## Definizione funzione di carico

Si sceglie un  $\Delta\tau$  che può variare durante la storia di carico

Al passo di carico  $n$  il carico applicato è:

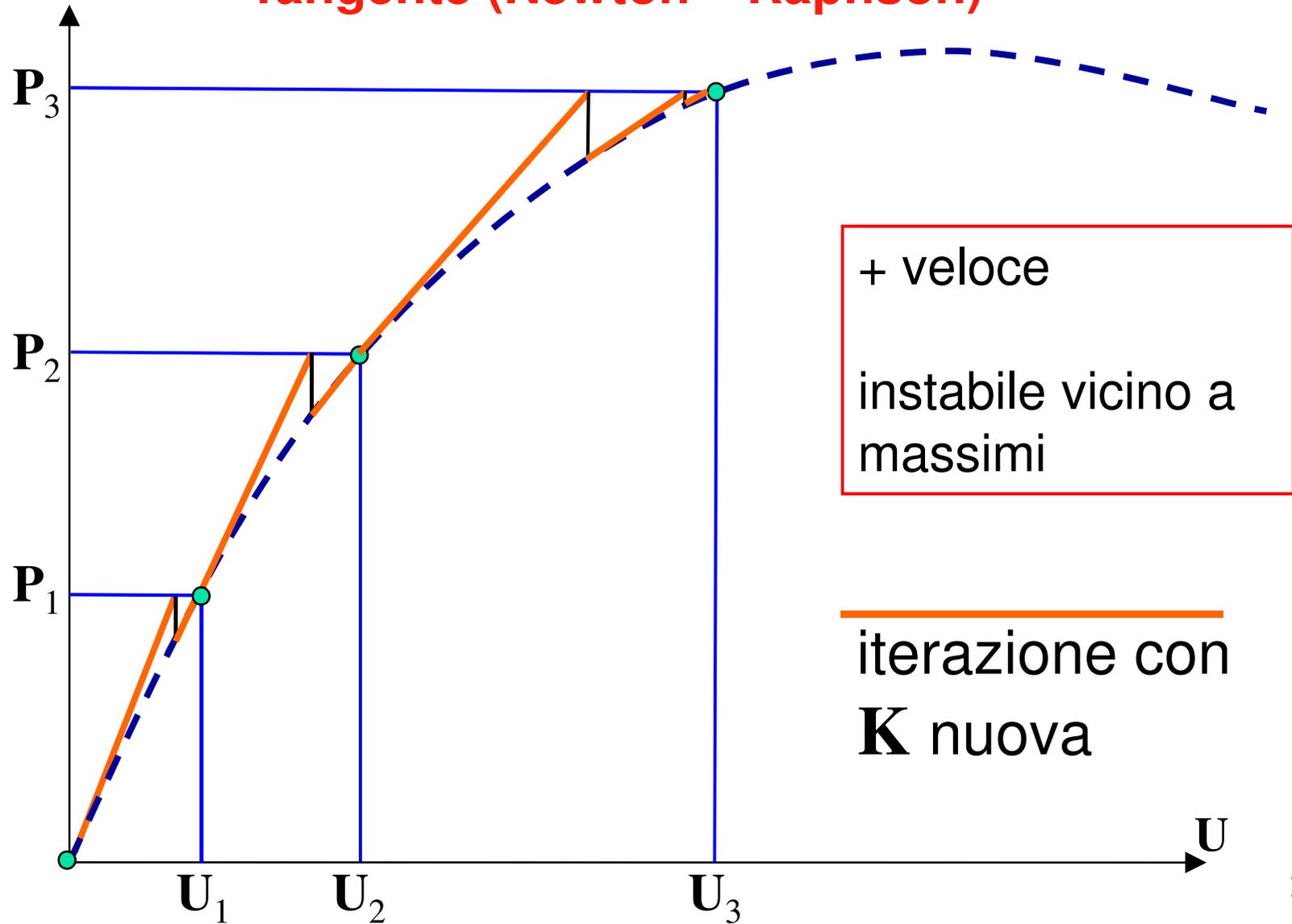


$$\lambda_{ref_n} = \sum_{l=1}^n \Delta\tau_l$$

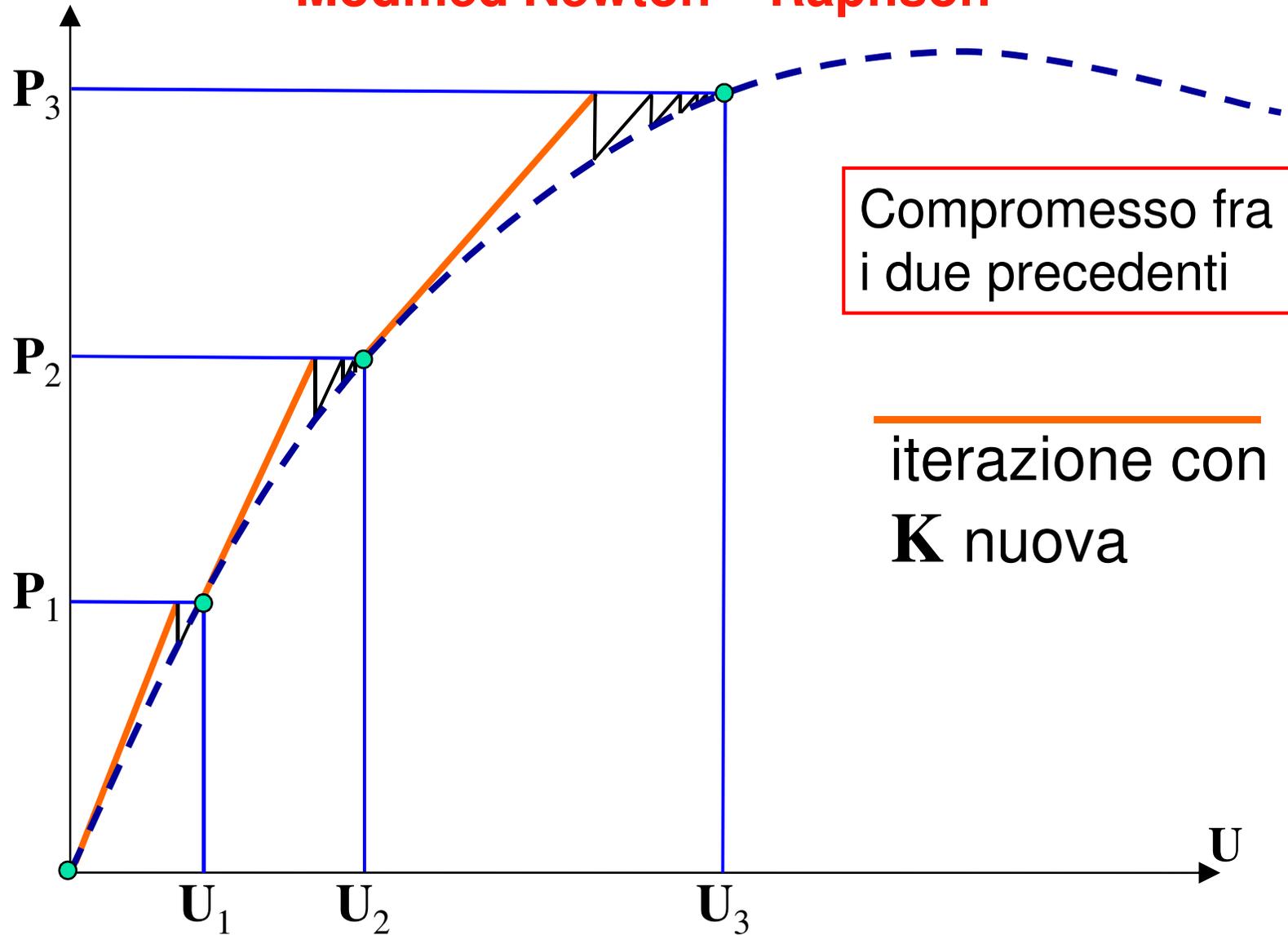
$$\mathbf{P}_n = \lambda_{ref_n} \mathbf{P}_{ref}$$

$\tau$  è uno pseudo-tempo

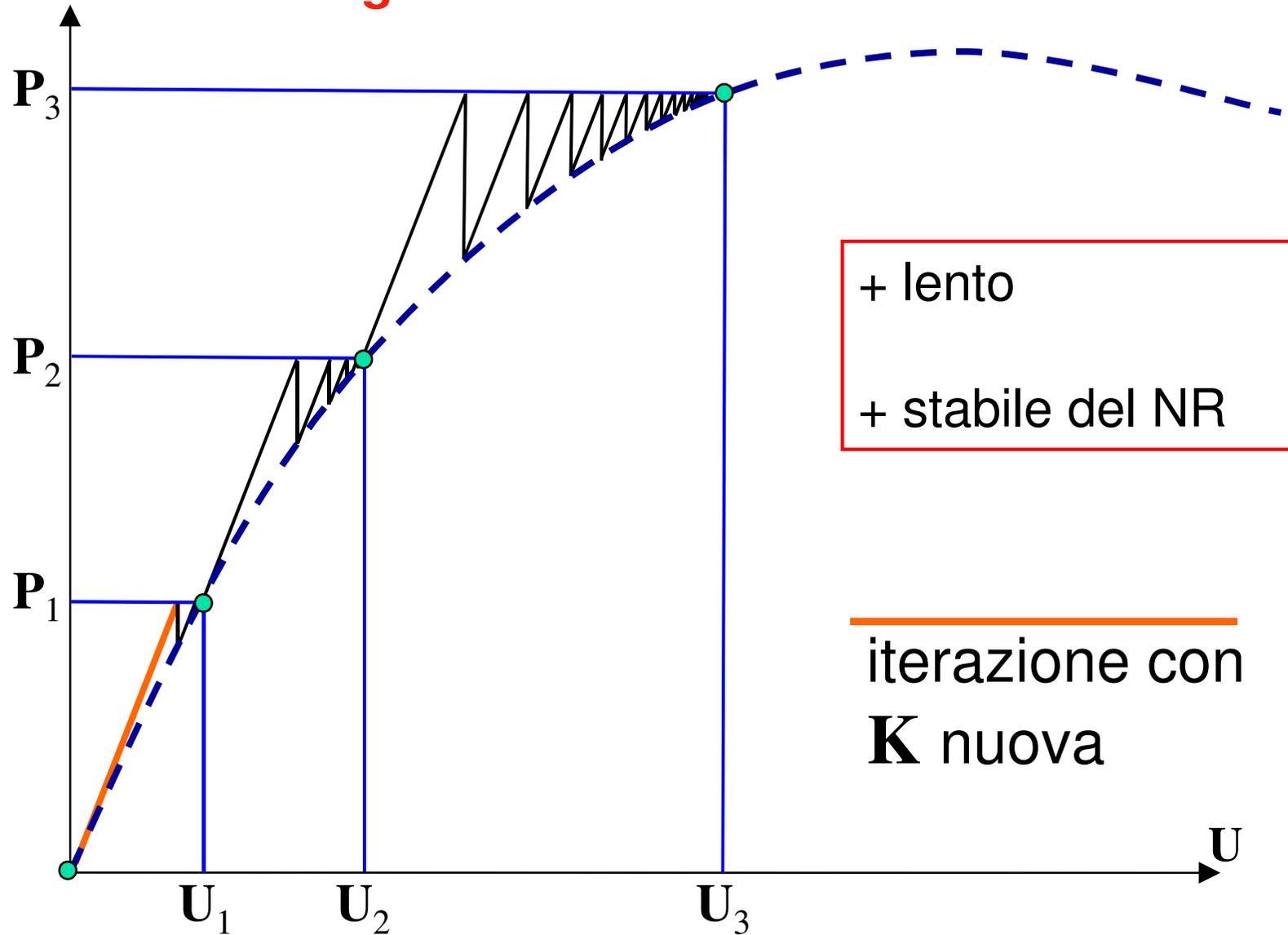
- **Tangente (Newton – Raphson)**



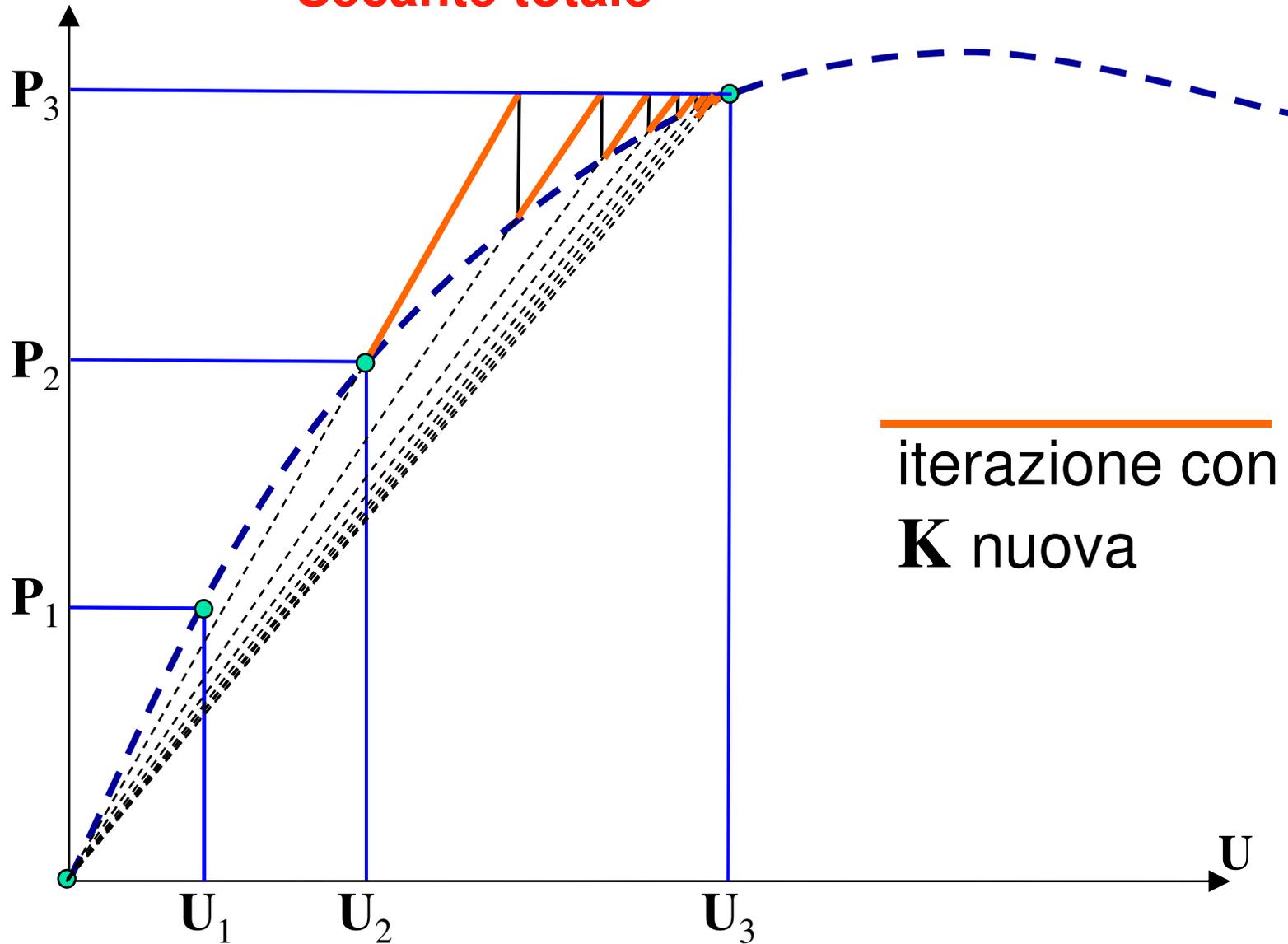
- **Modified Newton – Raphson**

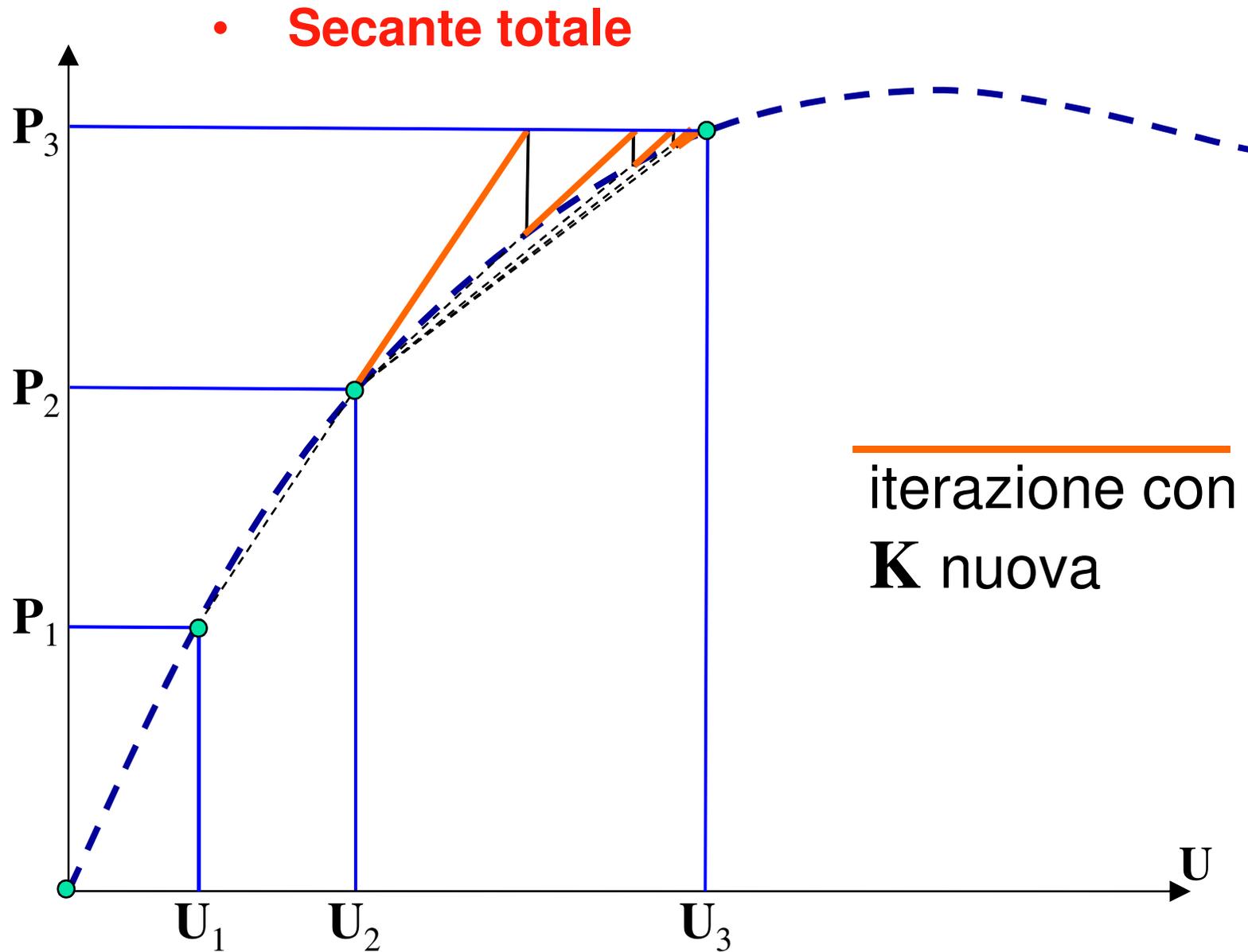


- **Rigidità iniziale**

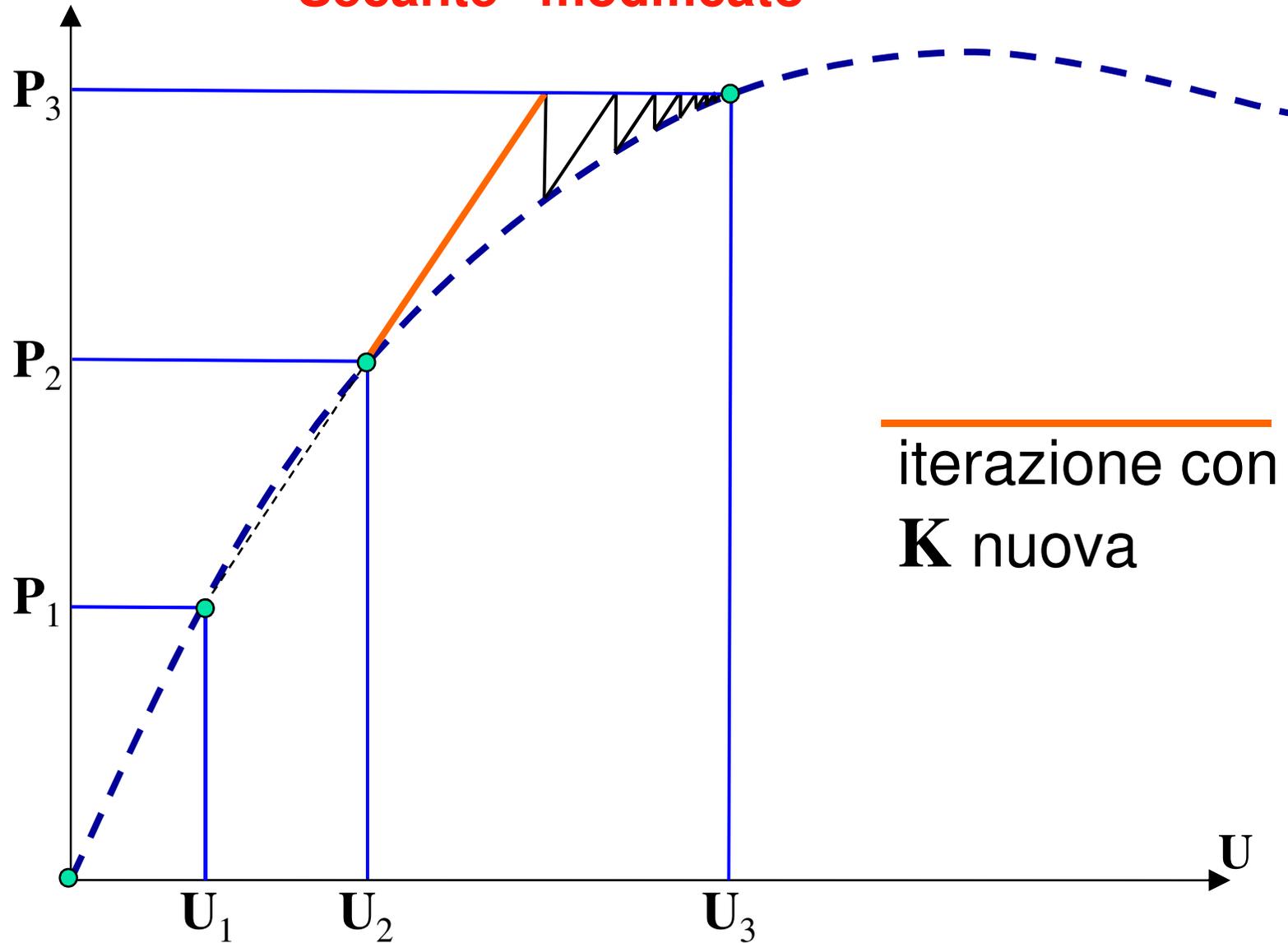


• **Secante totale**





- **Secante "modificato"**



## Riepilogo iterazioni al passo di carico $n$ ( $\mathbf{P}_n = \text{const}$ , iterazioni NR)

### VERSIONE 1

*for*  $i=1, \text{max\_numb\_iterations}$

*eventually compute*  $[\mathbf{K}^*]^{-1}$

$$d\mathbf{U}_n^i = [\mathbf{K}^*]^{-1} \mathbf{P}_{\text{unb}}^{i-1}$$

$$\Delta\mathbf{U}_n^i = \Delta\mathbf{U}_n^{i-1} + d\mathbf{U}_n^i, \quad \mathbf{U}_n^i = \mathbf{U}_{n-1} + \Delta\mathbf{U}_n^i$$

*for*  $e=1, \text{Nel}$

$$(\mathbf{U}^e)_n^i = \mathbf{E}^e \mathbf{U}_n^i$$

*compute*  $(\mathbf{K}^e)_n^i, (\mathbf{P}^e)_n^i$

*end*

$$\mathbf{K}_n^i = \mathbf{A}_e^{\text{Nel}} (\mathbf{K}^e)_n^i \quad (\mathbf{P}_R)_n^i = \mathbf{A}_e^{\text{Nel}} (\mathbf{P}^e)_n^i$$

$$\mathbf{P}_{\text{unb}}^i = \mathbf{P}_n - (\mathbf{P}_R)_n^i$$

*if*  $\mathbf{P}_{\text{unb}}^i \approx \mathbf{0}$  *exit loop and increment*  $n$

*end*

## Riepilogo iterazioni al passo di carico $n$ ( $\mathbf{P}_n = const$ , iterazioni NR)

### VERSIONE 2

```

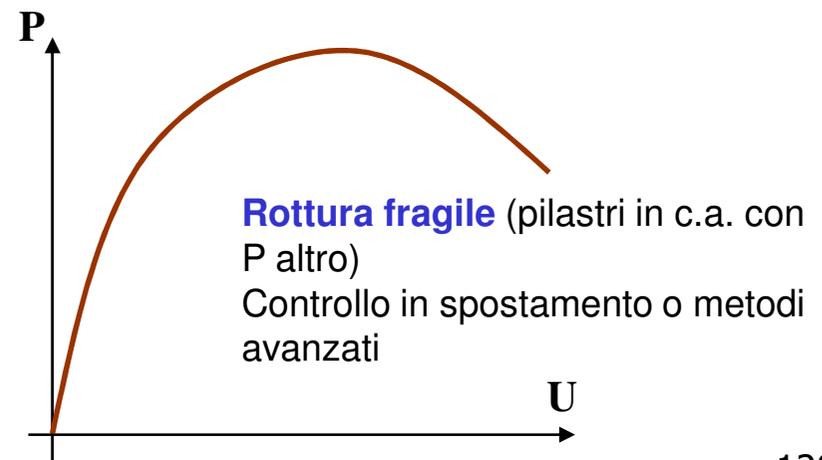
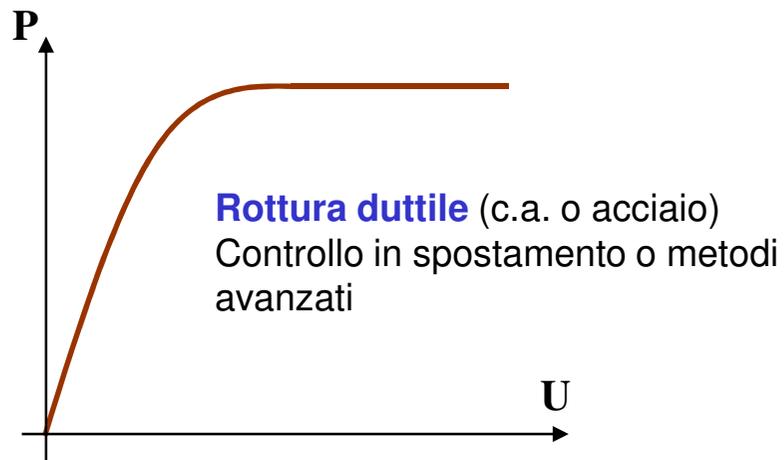
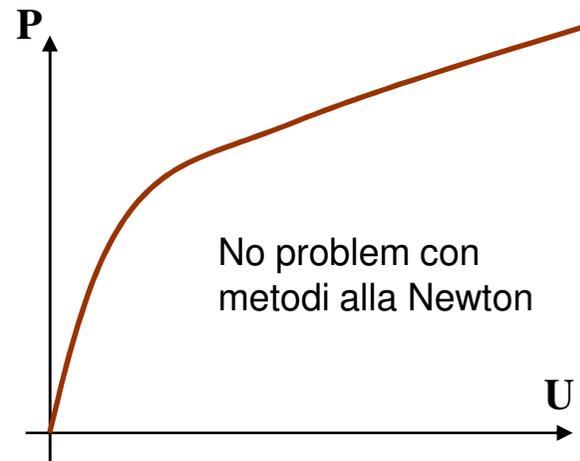
for i=1,max_numb_iterations
  for e=1, Nel
     $(\mathbf{U}^e)_n^i = \hat{\mathbf{E}} \mathbf{U}_n^i$ 
    compute  $(\mathbf{K}^e)_n^i, (\mathbf{P}^e)_n^i$ 
  end
   $\mathbf{K}_n^i = \hat{\mathbf{A}}_e (\mathbf{K}^e)_n^i$        $(\mathbf{P}_R)_n^i = \hat{\mathbf{A}}_e (\mathbf{P}^e)_n^i$ 
   $\mathbf{P}_{unb}^i = \mathbf{P}_n - (\mathbf{P}_R)_n^i$ 
  if  $\mathbf{P}_{unb}^i \approx \mathbf{0}$  exit loop and increment n
  eventually compute  $[\mathbf{K}^*]^{-1}$ 
   $d\mathbf{U}_n^i = [\mathbf{K}^*]^{-1} \mathbf{P}_{unb}^i$ 
   $\Delta \mathbf{U}_n^i = \Delta \mathbf{U}_n^{i-1} + d\mathbf{U}_n^i$ ,     $\mathbf{U}_n^i = \mathbf{U}_{n-1} + \Delta \mathbf{U}_n^i$ 
end

```

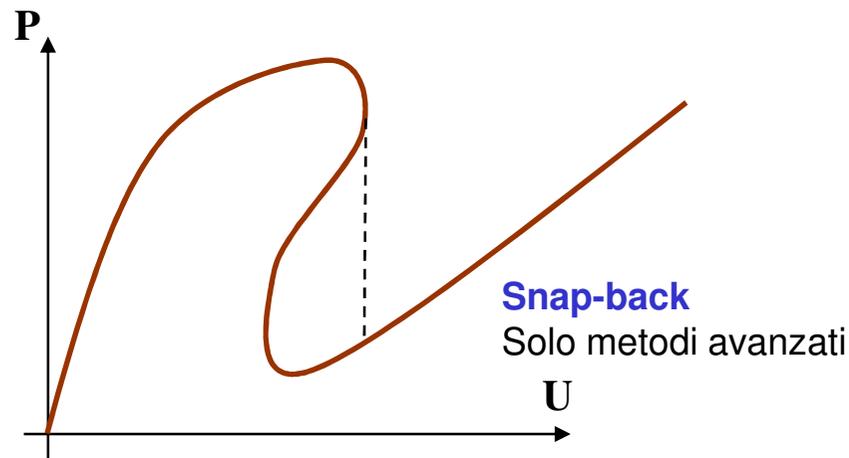
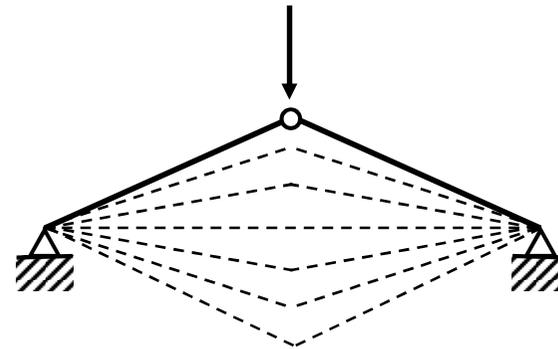
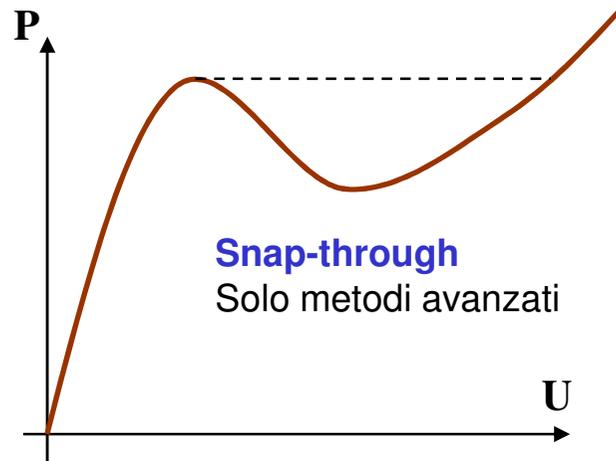
## Cosa vuol dire “eventually compute” $[\mathbf{K}^*]^{-1}$ ?

- $\mathbf{K}$  non è invertita, ma viene effettuata una triangolarizzazione (operazione che costa molto meno dell’inversione)
- Rimane comunque il passo lento della soluzione del problema, quindi a volte si cerca di evitare l’ “inversione” ad ogni passo (come nel NR)
- Rigidezza iniziale: inversione di  $\mathbf{K}$  solo al primissimo passo (EL) dell’analisi  $\mathbf{K}^* = \mathbf{K}_{n=1}^{i=0} = \mathbf{K}_0$
- NR-modificato: inversione di  $\mathbf{K}$  solo alla prima iterazione del passo di carico  $\mathbf{K}^* = \mathbf{K}_n^{i=0}$

## DIFFERENTI TIPI DI RISPOSTA

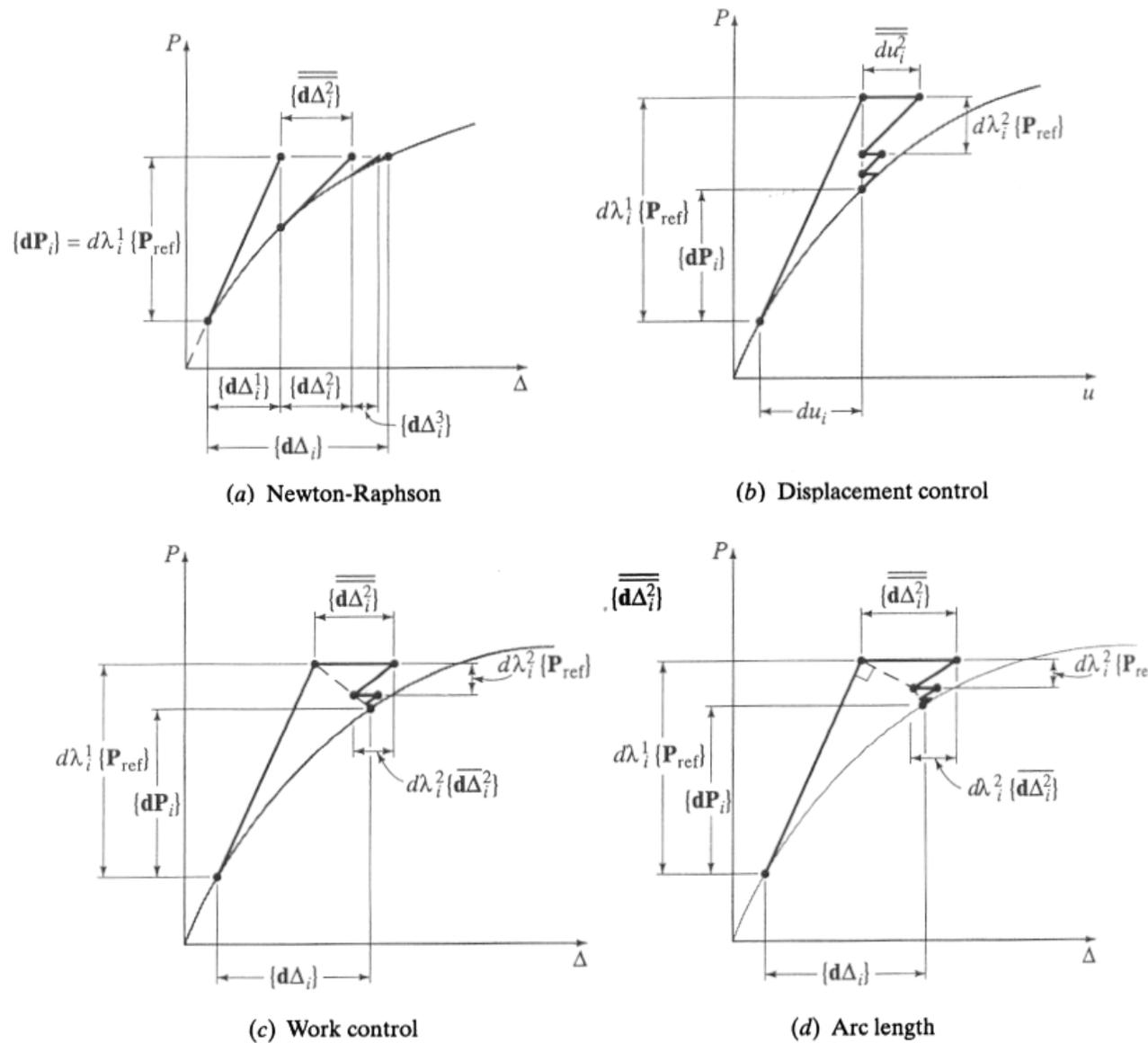


## DIFFERENTI TIPI DI RISPOSTA



**Localizzazione con  
softening locale  
(vedere Diapositive)**

# ALTRE PROCEDURE ITERATIVE

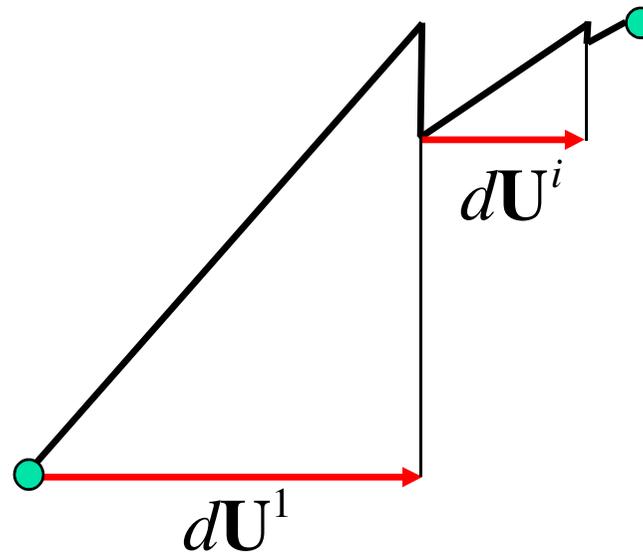


## Convergenza in spostamento

$$\|d\mathbf{U}^i\| < tol_U$$

oppure

$$\frac{\|d\mathbf{U}^i\|}{\|d\mathbf{U}^1\|} < tol_{\bar{U}}$$



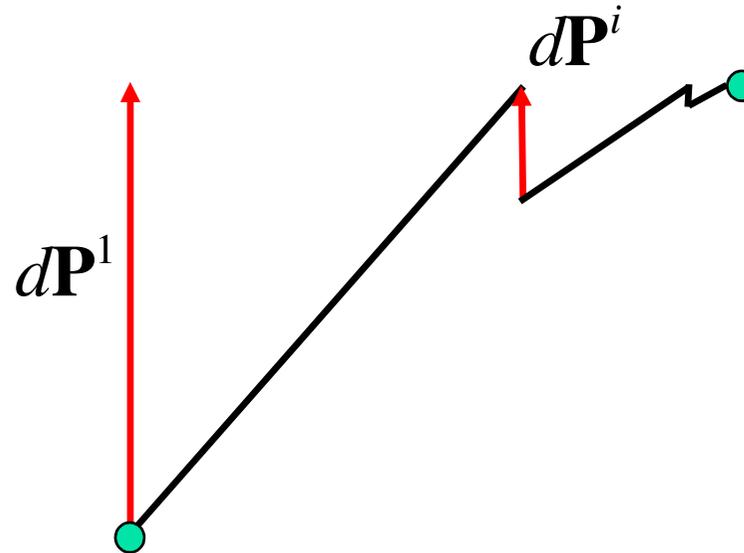
non funziona bene per  $\mathbf{K}$  molto alta  
troppo restrittivo in altri casi  
PRINCIPALMENTE TEORICO

## Convergenza in forza

$$\|d\mathbf{P}^i\| < tol_{\mathbf{P}}$$

oppure

$$\frac{\|d\mathbf{P}^i\|}{\|d\mathbf{P}^1\|} < tol_{\overline{\mathbf{P}}}$$



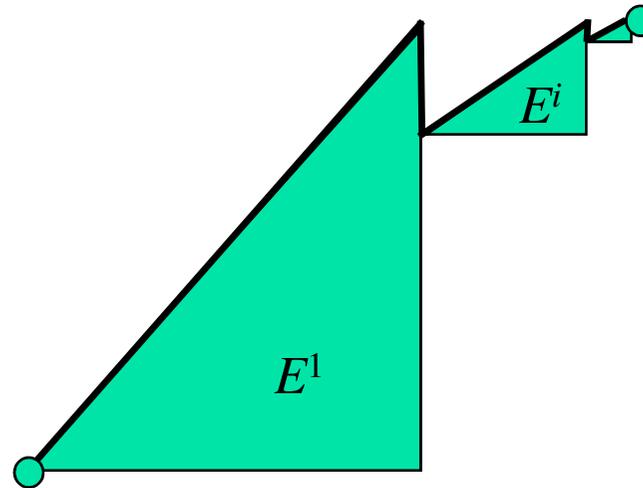
non funziona bene per  $\mathbf{K}$  molto piccola  
USATO

## Convergenza in energia

$$\|E^i\| < tol_E$$

oppure

$$\frac{\|E^i\|}{\|E^1\|} < tol_{\bar{E}}$$



MOLTO USATO

Controllare  $E_0$  non troppo piccola

## Quante iterazioni all'interno di un passo di carico?

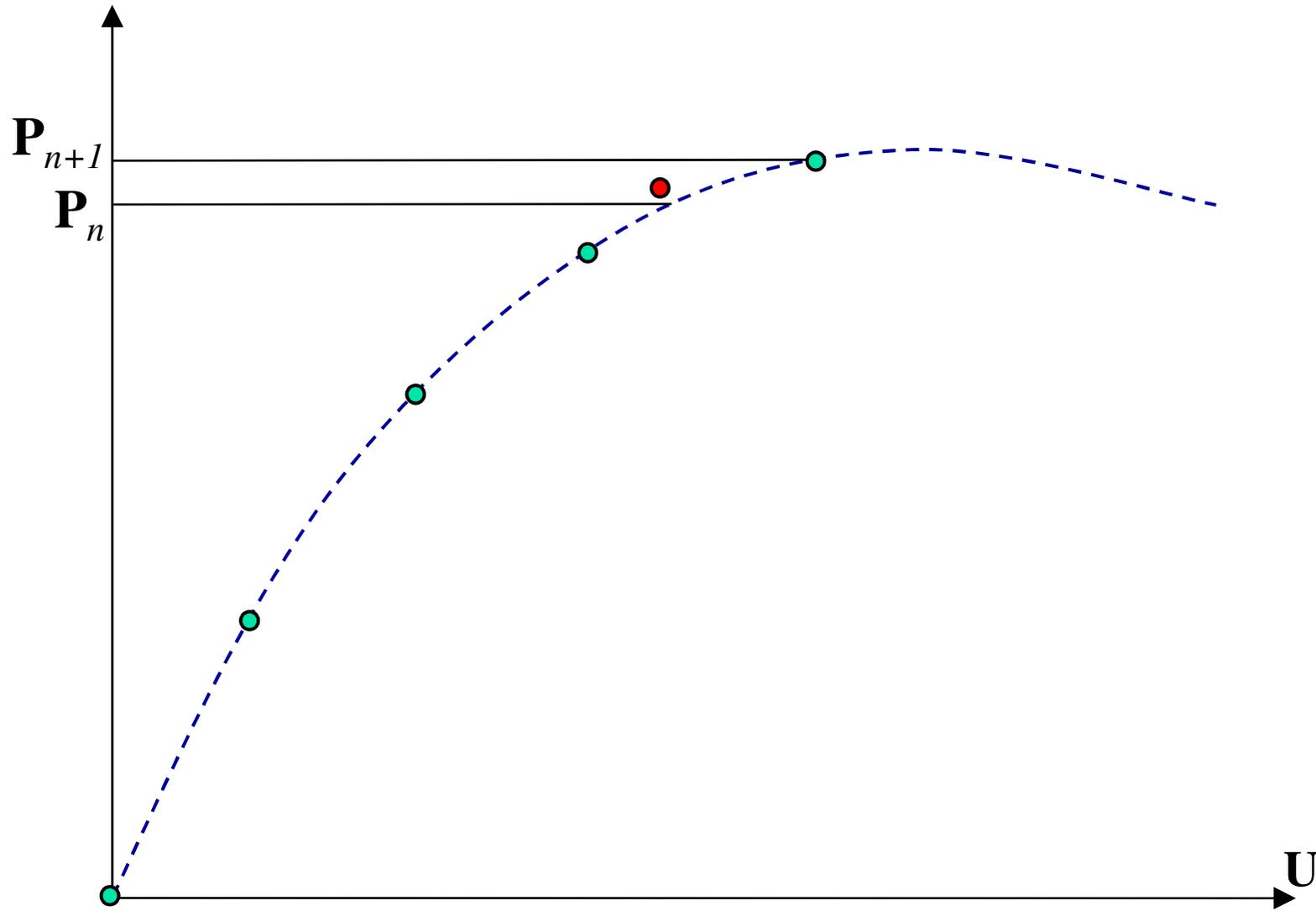
- I programmi fissano un limite di default e/o chiedono all'utente di fissarlo (per esempio  $i \leq 10$ )
- Se il criterio di convergenza è soddisfatto con  $i \leq 10$  il passo di carico è concluso e si incrementa il carico passando al passo successivo
- Se il criterio di convergenza non è soddisfatto a  $i=10$ , o il programma si ferma, o avanza segnalando però il problema, o avanza e non dice niente (!)

- CONVERGENZA? **SI** → Avanza al passo di carico successivo  
 $n=n+1$
- CONVERGENZA? **NO**
  - Il programma si ferma. Si ripete l'analisi rinfittendo il passo di carico
    - Alcuni programmi hanno il comando RESTART che permette di ripartire dall'ultimo punto di convergenza
  - Il programma continua segnalando o no il problema
    - Divergenza
    - Convergenza ritardata al passo successivo (controllare se convergenza su un altro ramo di equilibrio)

# CONVERGENZA RITARDATA AL PASSO SUCCESSIVO

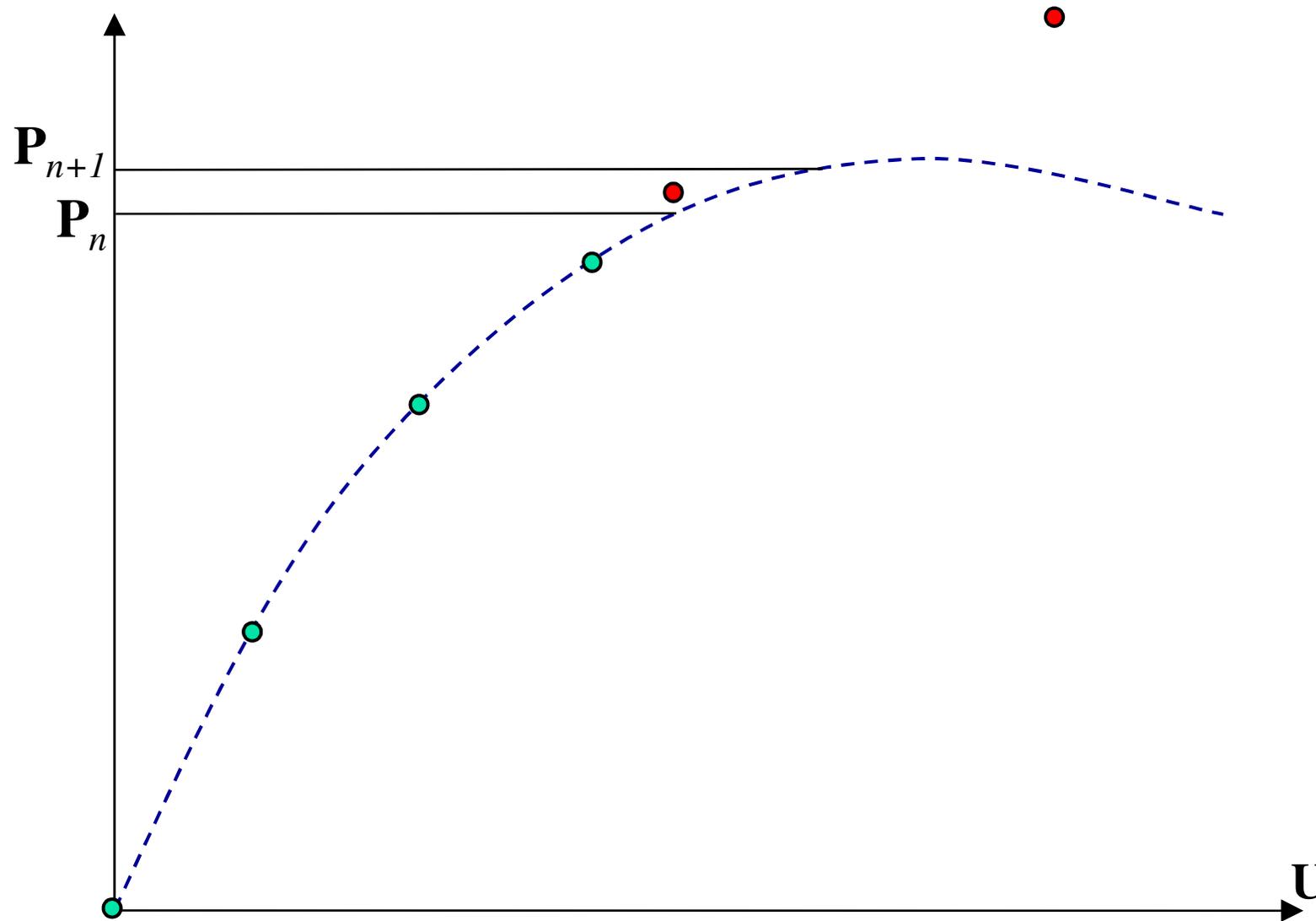
---

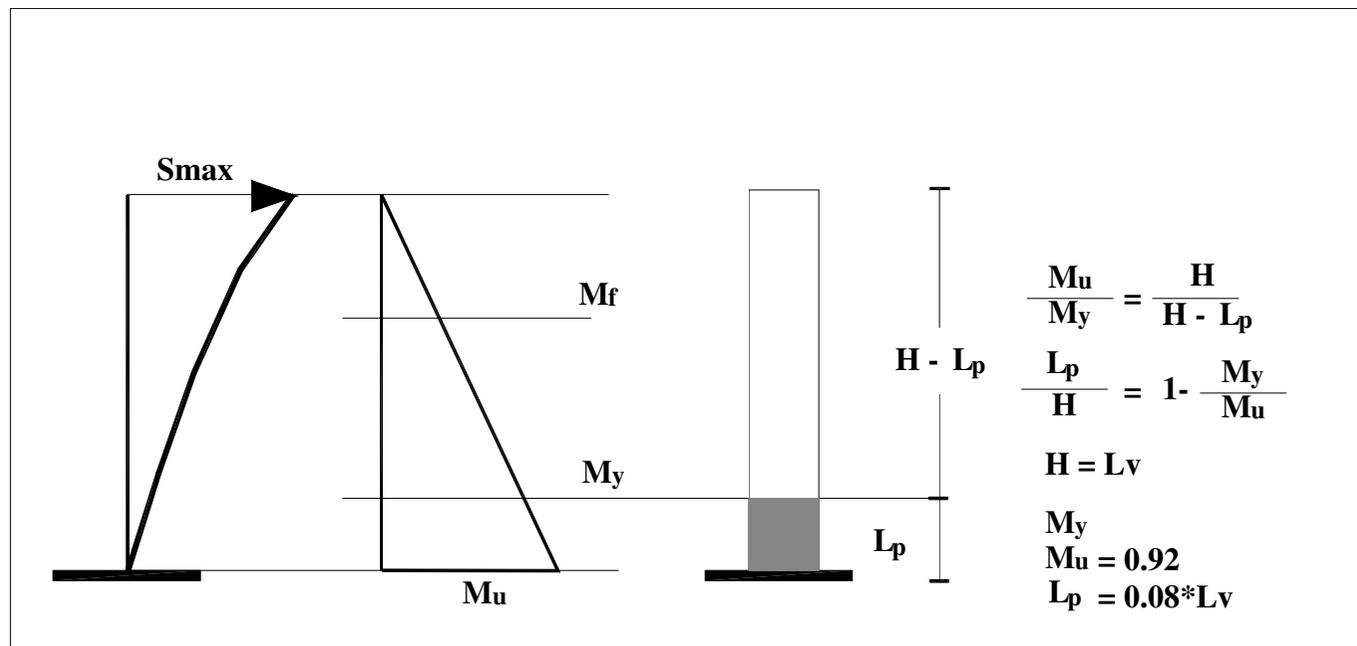
DA PAGINA 34



# DIVERGENZA

---



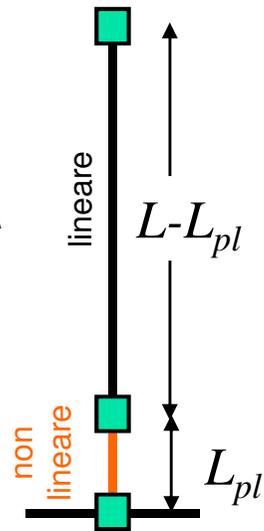
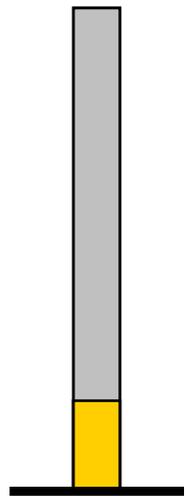


$$L_{pl} = 0,1L_v + 0,17h + 0,24 \frac{d_{bL} f_y (MPa)}{\sqrt{f_c (MPa)}} \quad (\text{OPCM 3431 Punto 11.A.4})$$

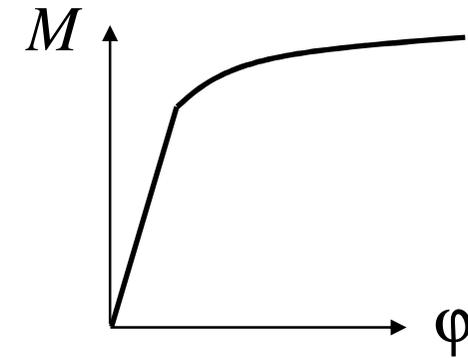
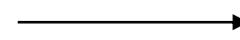
$L_v = M/V =$  luce di taglio

$d_{bL} =$  diametro barre longitudinali

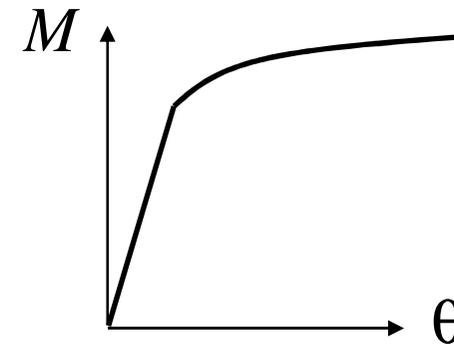
# MODELLI DI CERNIERA PLASTICA



Hp:  
curvatura  $\varphi$   
costante su  $L_{pl}$

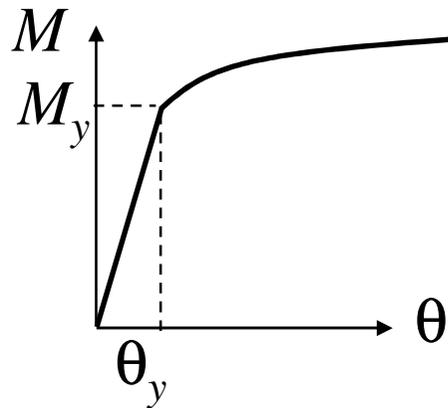
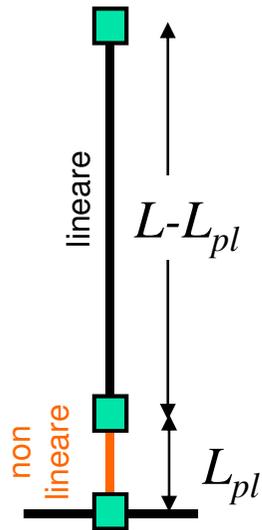


$$\theta = \varphi L_{pl}$$

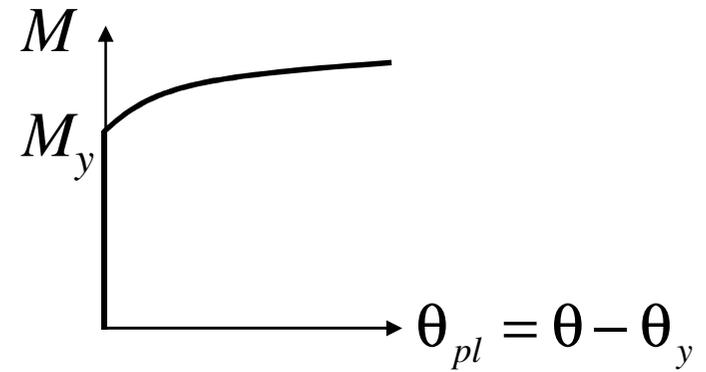
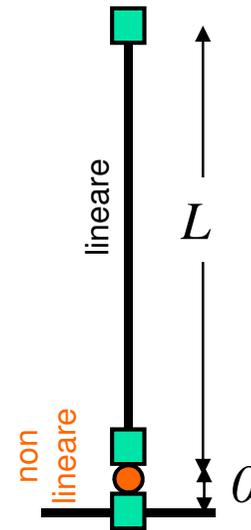


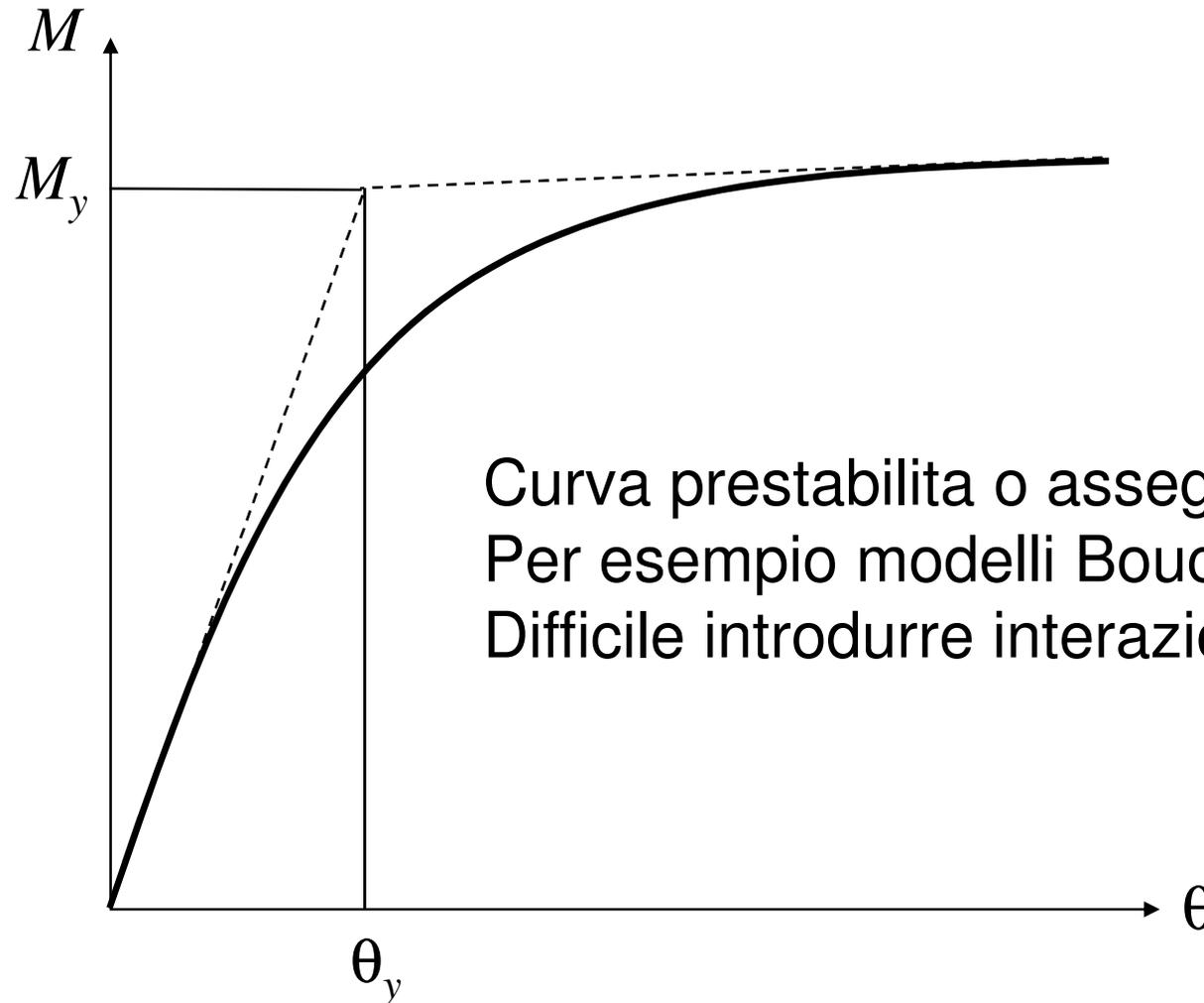
# MODELLI DI CERNIERA PLASTICA

## Modello A



## Modello B

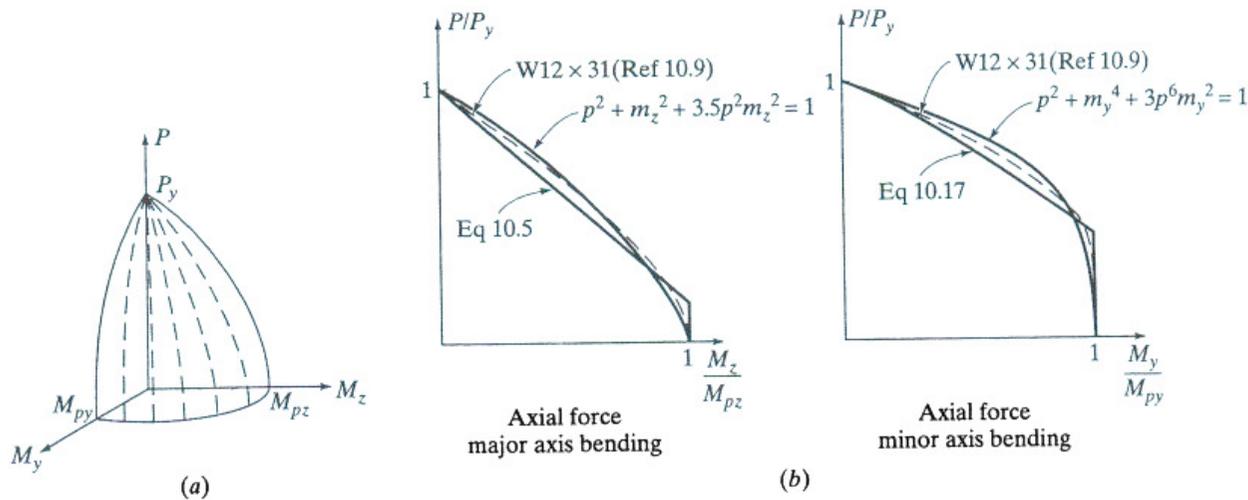
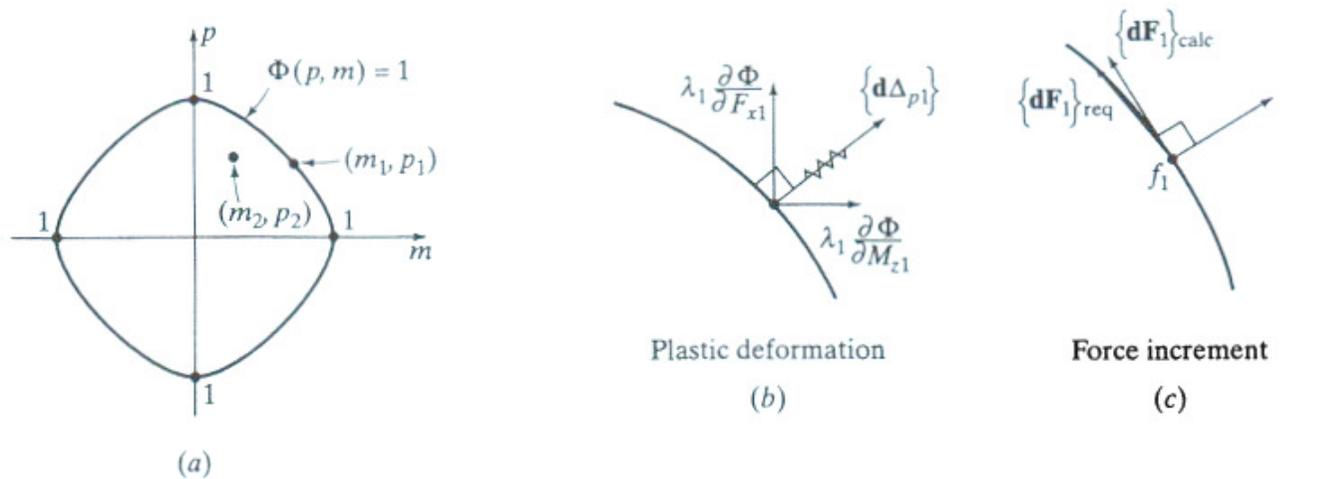




Curva prestabilita o assegnata  
Per esempio modelli Bouc-Wen e Takeda  
Difficile introdurre interazione  $P-M$

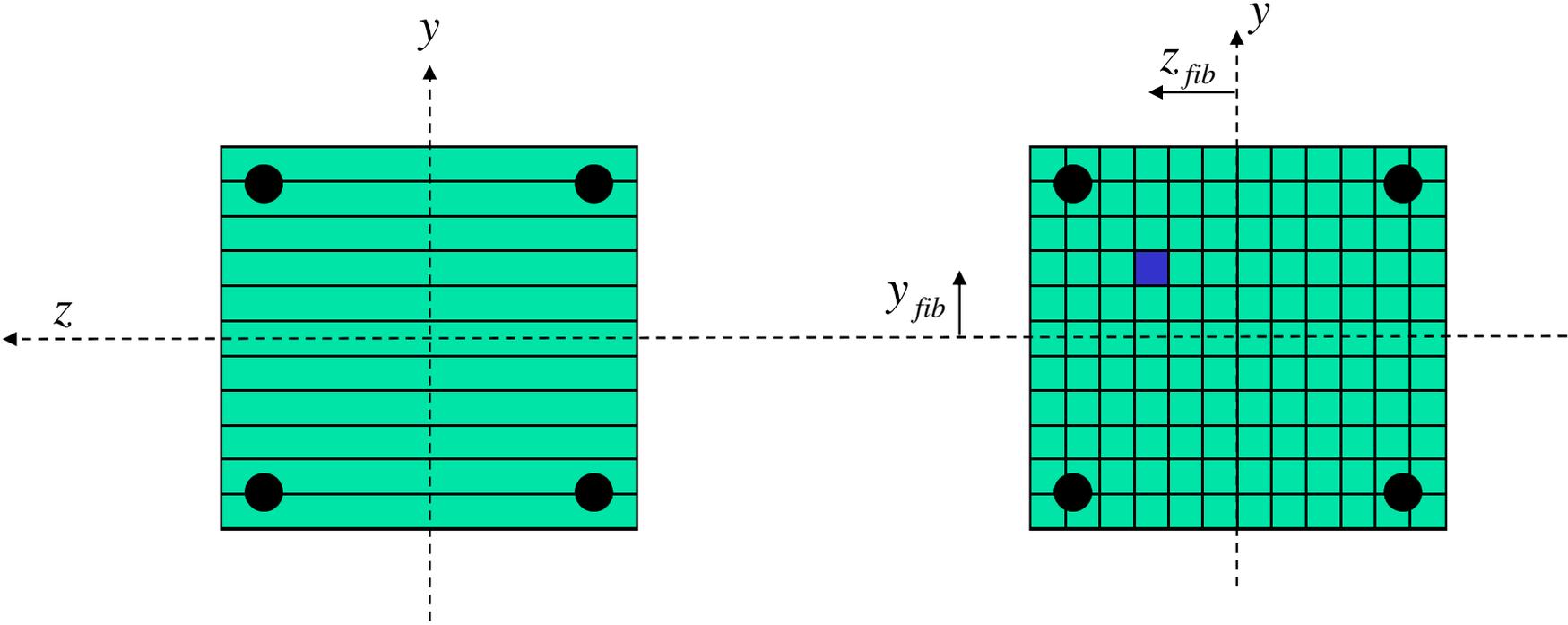


# CERNIERA PLASTICA BASATA SULLA TEORIA DELLA PLASTICITA'



## Layer Section

## Fiber Section



$$\mathbf{l}_{fib} = \{-y_{fib} \quad z_{fib} \quad 1\}$$

for section  $h$

GIVEN  $\mathbf{e}_h^s$

for  $fib = 1, n_{fib}$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{fib} = \mathbf{l}_{fib} \mathbf{e}_h^s$$

FIBER STATE DETERMINATION  $\Rightarrow E_{fib}, \sigma_{fib}$

next

section stiffness  $\mathbf{k}_h^s = \sum_{fib} \mathbf{l}_{fib}^T (E_{fib} A_{fib}) \mathbf{l}_{fib}$

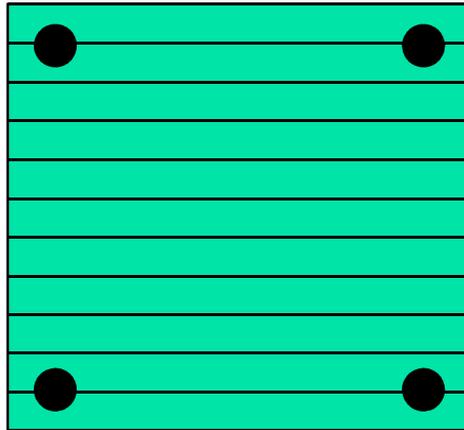
section forces  $\mathbf{s}_h^s = \sum_{fib} \mathbf{l}_{fib}^T (\sigma_{fib} A_{fib})$

SECTION STATE DETERMINATION

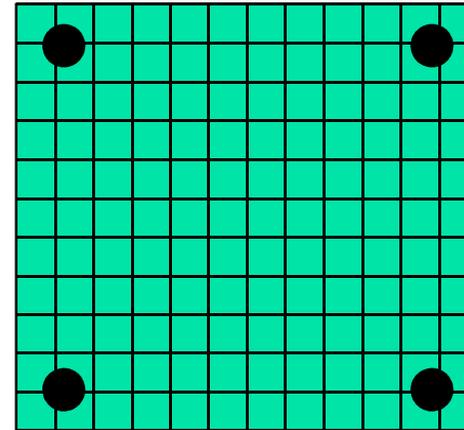
# CERNIERA PLASTICA CON SEZIONE A FIBRE

DA PAGINA 50

Layer Section

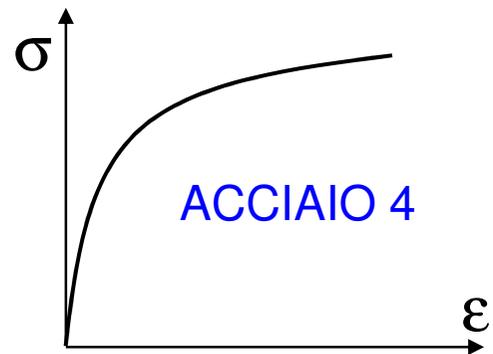
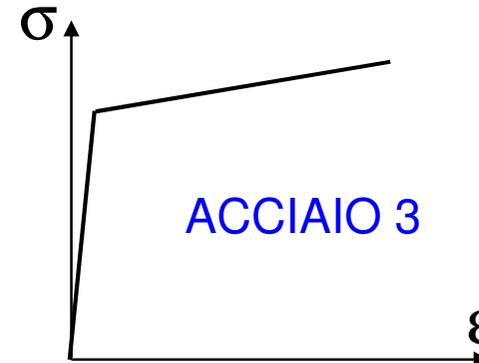
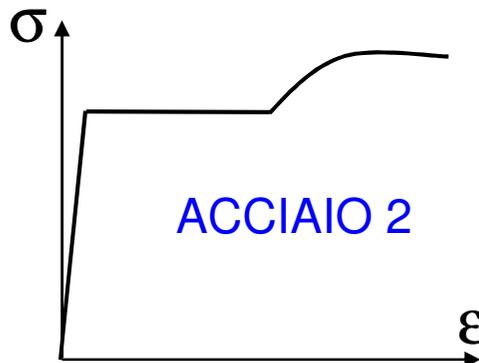
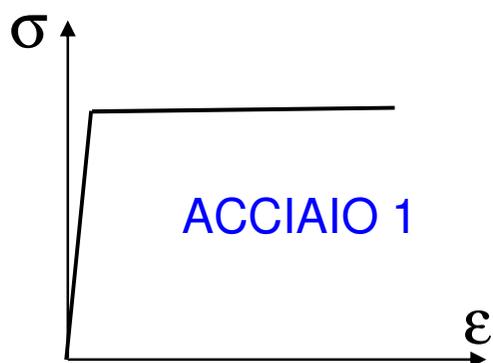


Fiber Section

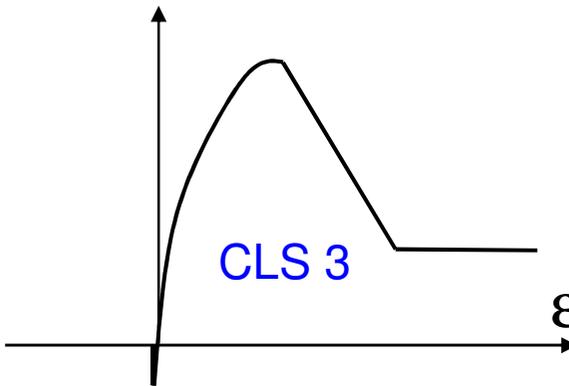
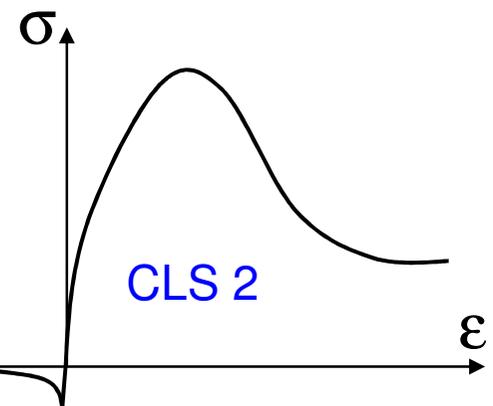
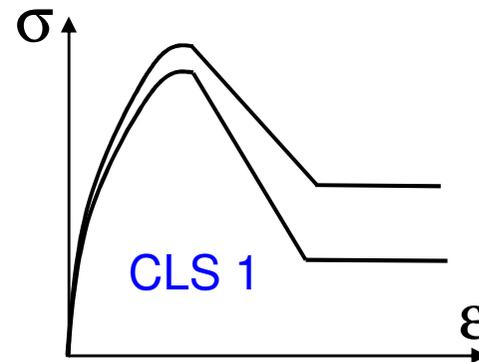


- Interazione Automatica  $P-M$  (o  $P-M_1-M_2$  nel caso di pressoflessione deviata)
- Possibilità di introdurre interazione  $P-M-V$  (non ancora in programmi commerciali)
- Può creare problemi di convergenza se i materiali non sono ben scelti
- Quante fibre scegliere?

# LEGGI COSTITUTIVE FIBRE



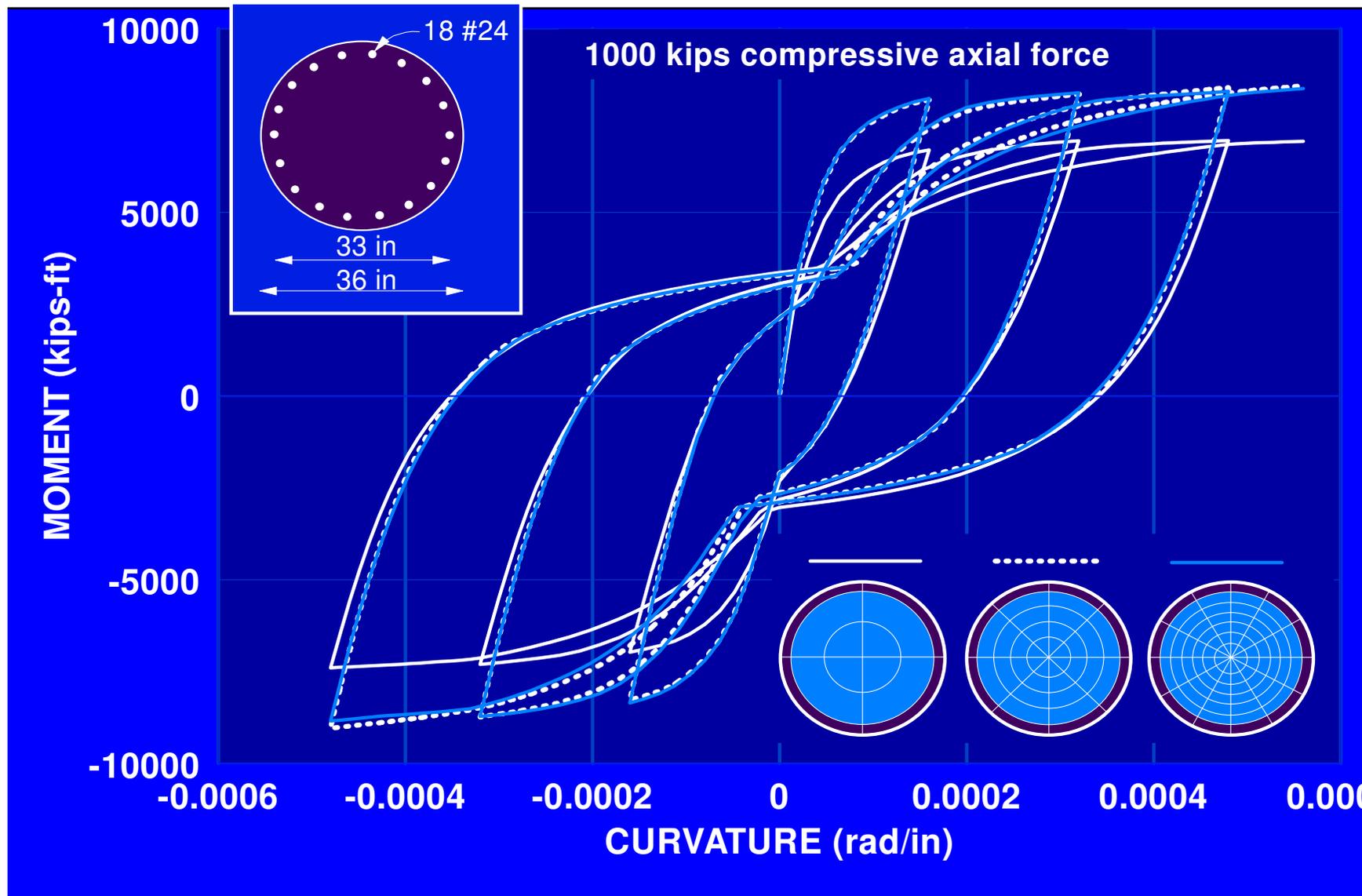
-----



-----

# SENSIBILITA' RISPOSTA: SEZIONE A FIBRE

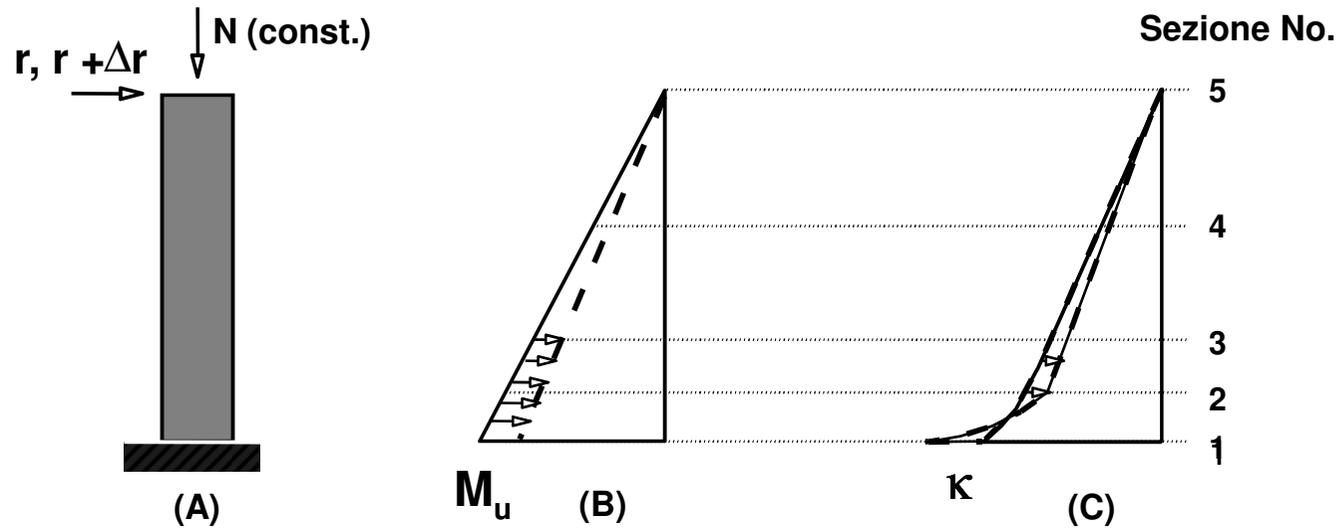
DA PAGINA 50



50

# FORMULAZIONE IN FORZE ED ELEMENTO NONLINEARE CON SOFTENING

DA PAGINA 77

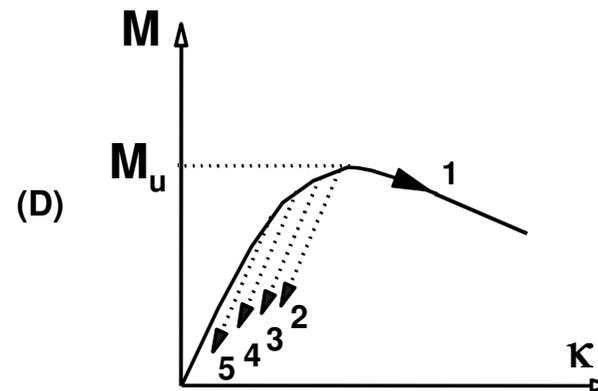


(A) ELEMENTO E CARICHI

(B) DIAGRAMMA MOMENTI

(C) DISTRIBUZIONE CURVATURA

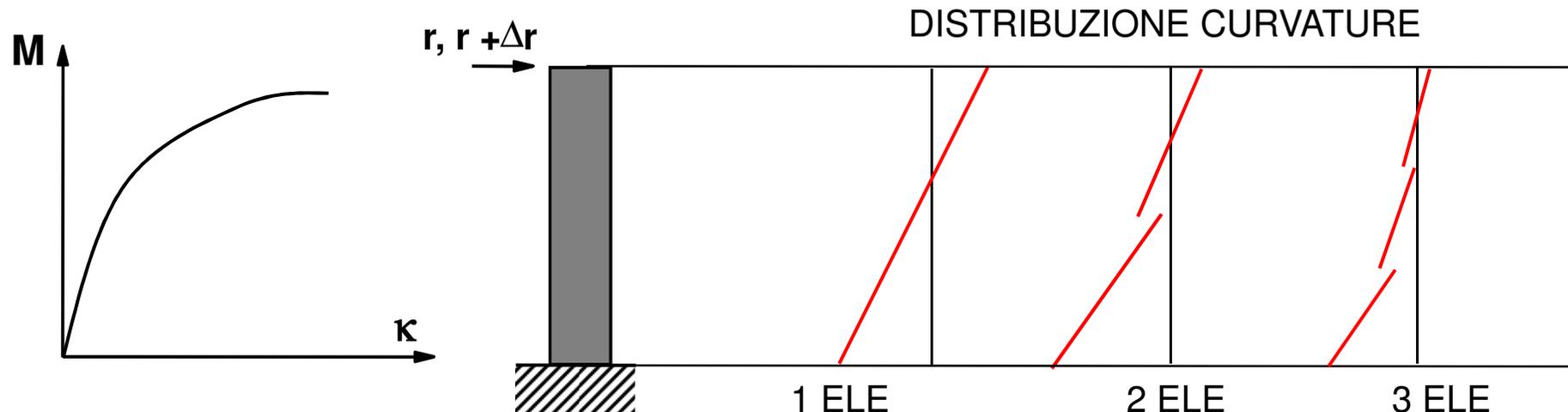
(D) MOMENTO-CURVATURA



## Confronto Elementi Telaio in Spostamenti ed in Forze

### □ Elemento in Spostamenti

- Equilibrio solo in forma integrale
- Compatibilità delle deformazioni solo all'interno dell'elemento

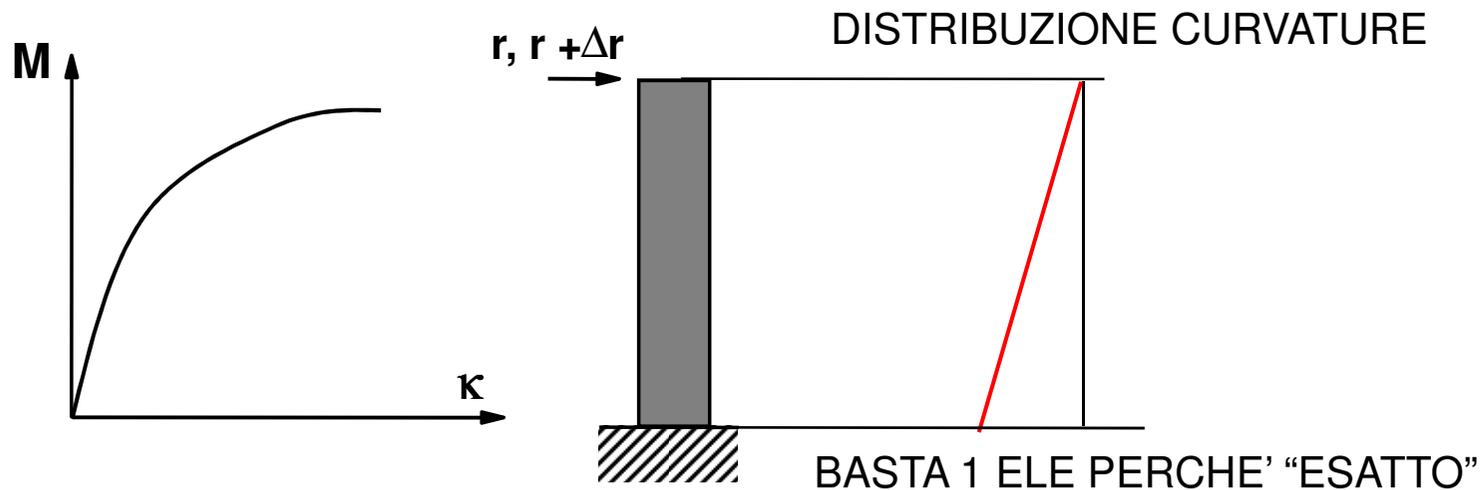


Gli elementi “comunicano” solo attraverso le forze e gli spostamenti nodali:  
Salto di curvatura e momento fra gli elementi (come negli EF)

## Confronto Elementi Telaio in Spostamenti ed in Forze

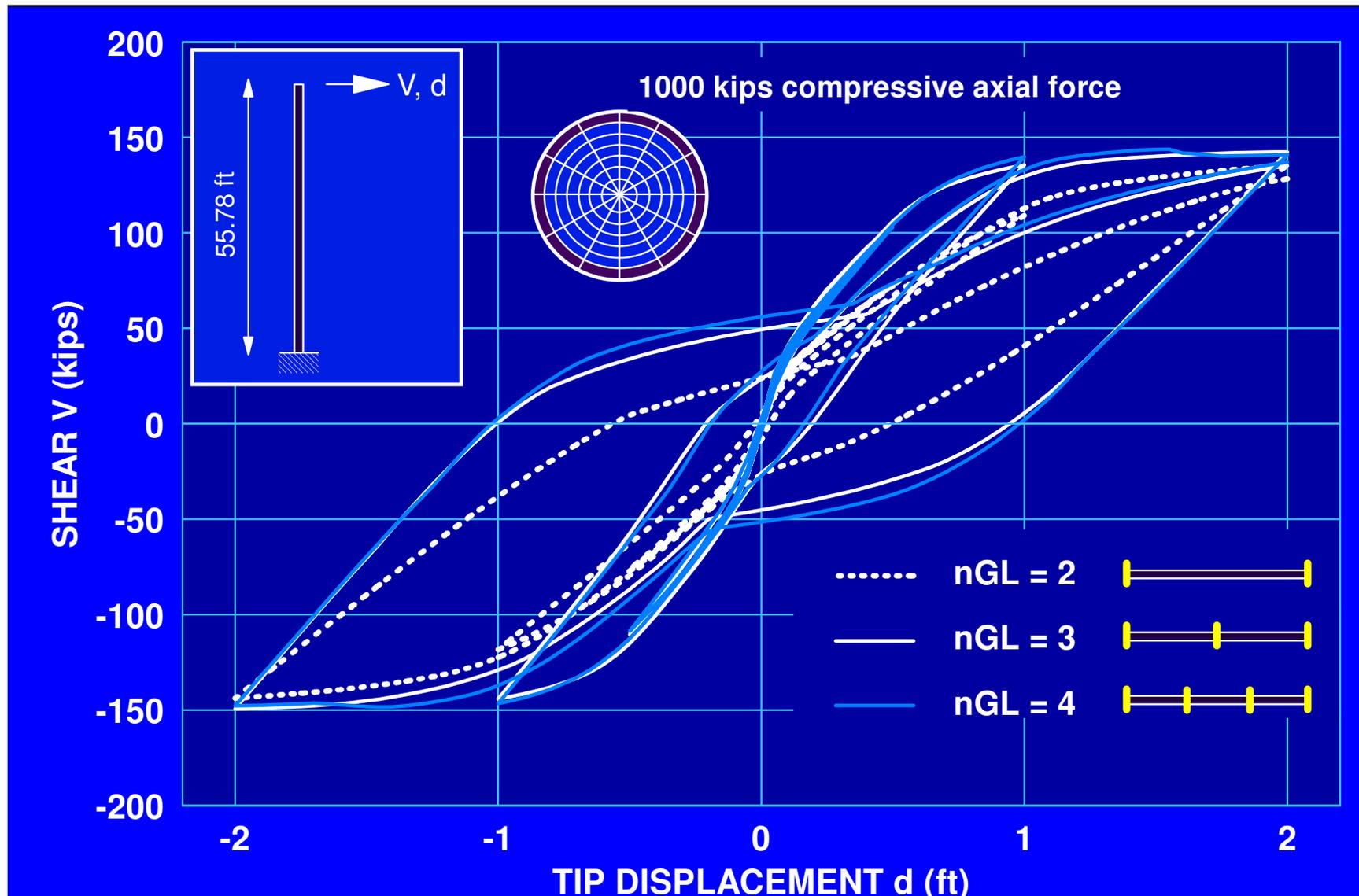
### □ Elemento in Forze

- Compatibilità solo in forma integrale
- Equilibrio delle forze solo all'interno dell'ele
- Per travi di Eulero-Bernoulli e Timoshenko ele è "esatto"

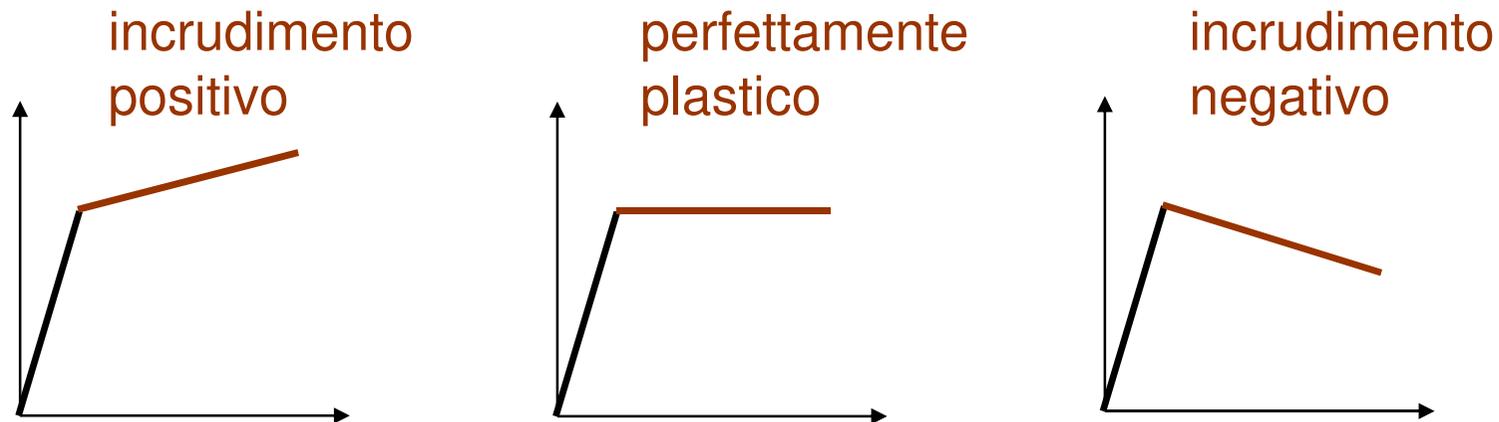


Per applicazioni in cui l'elemento è esatto (elemento con scorrimento, per esempio), salto di curvatura fra gli elementi (come negli EF)

# SENSIBILITÀ DELL'ELEMENTO IN FORZE AL NUMERO DI PUNTI DI INTEGRAZIONE



## Perdita di Oggettività

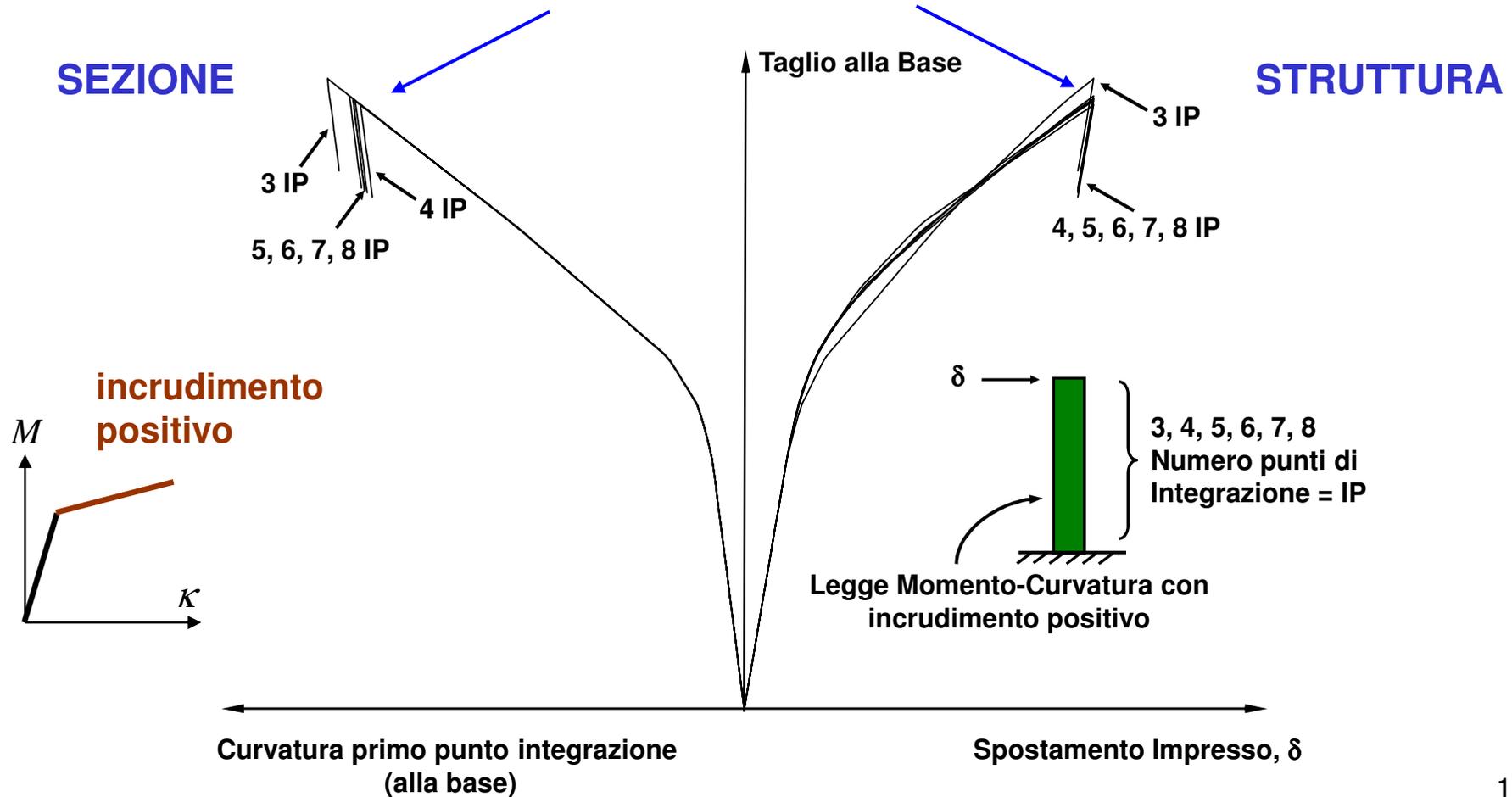


In presenza di comportamento perfettamente plastico o con incrudimento negativo si ha localizzazione della risposta e perdita di oggettività

# RISPOSTA DI COLONNA CON SPOSTAMENTI IMPOSTI $\delta$ - 1 ELEMENTO IN FORZE

Punti di Integrazione IP=3,4,5,6,7,8 (Gauss-Lobatto)

## RISPOSTA OGGETTIVA



# RISPOSTA DI COLONNA CON SPOSTAMENTI IMPOSTI $\delta$ - 1 ELEMENTO IN FORZE

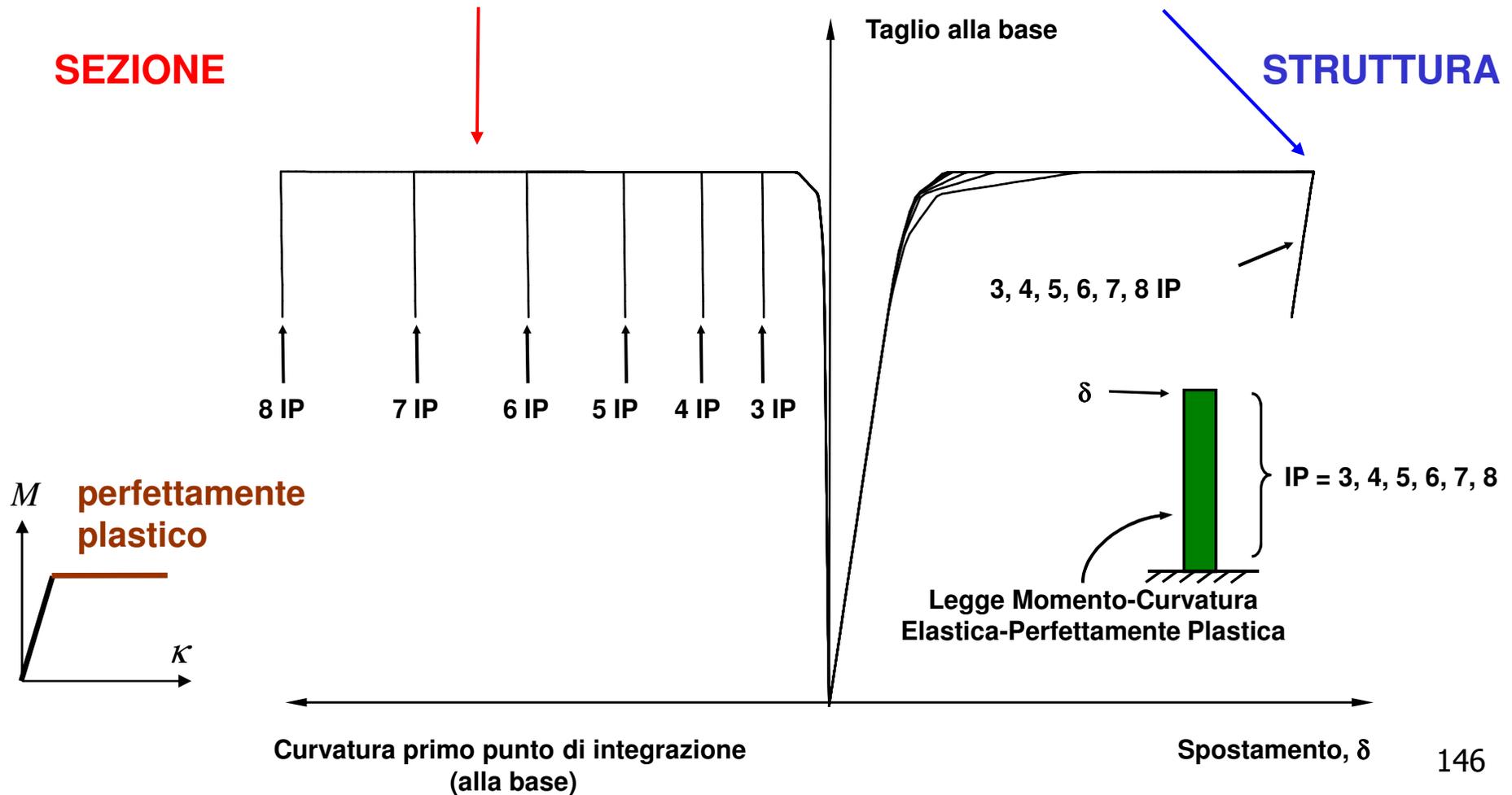
Punti di Integrazione IP=3,4,5,6,7,8 (Gauss-Lobatto)

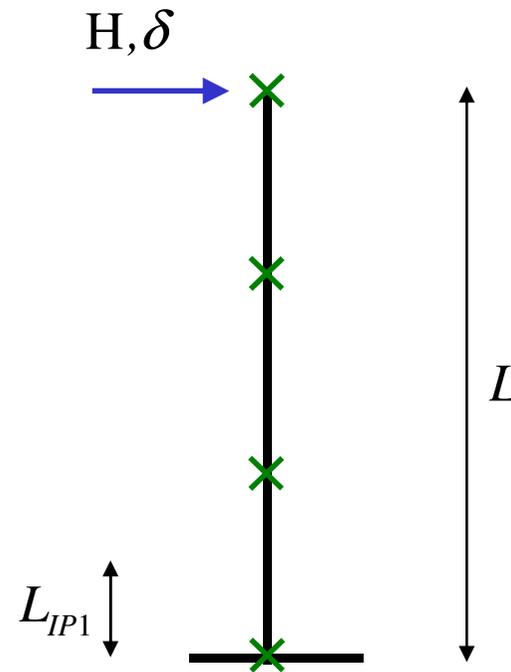
**RISPOSTA NON OGGETTIVA**

**RISPOSTA OGGETTIVA**

**SEZIONE**

**STRUTTURA**





$$\delta \approx \underbrace{\frac{L^3}{3EI} H}_{\text{contributo elastico}} + \underbrace{\left( \kappa_{IP1} - \kappa_y \right) L_{IP1} (L - L_{IP1})}_{\text{contributo rotazione plastica punto integrazione 1}}$$

# RISPOSTA DI COLONNA CON SPOSTAMENTI IMPOSTI $\delta$ - 1 ELEMENTO IN FORZE

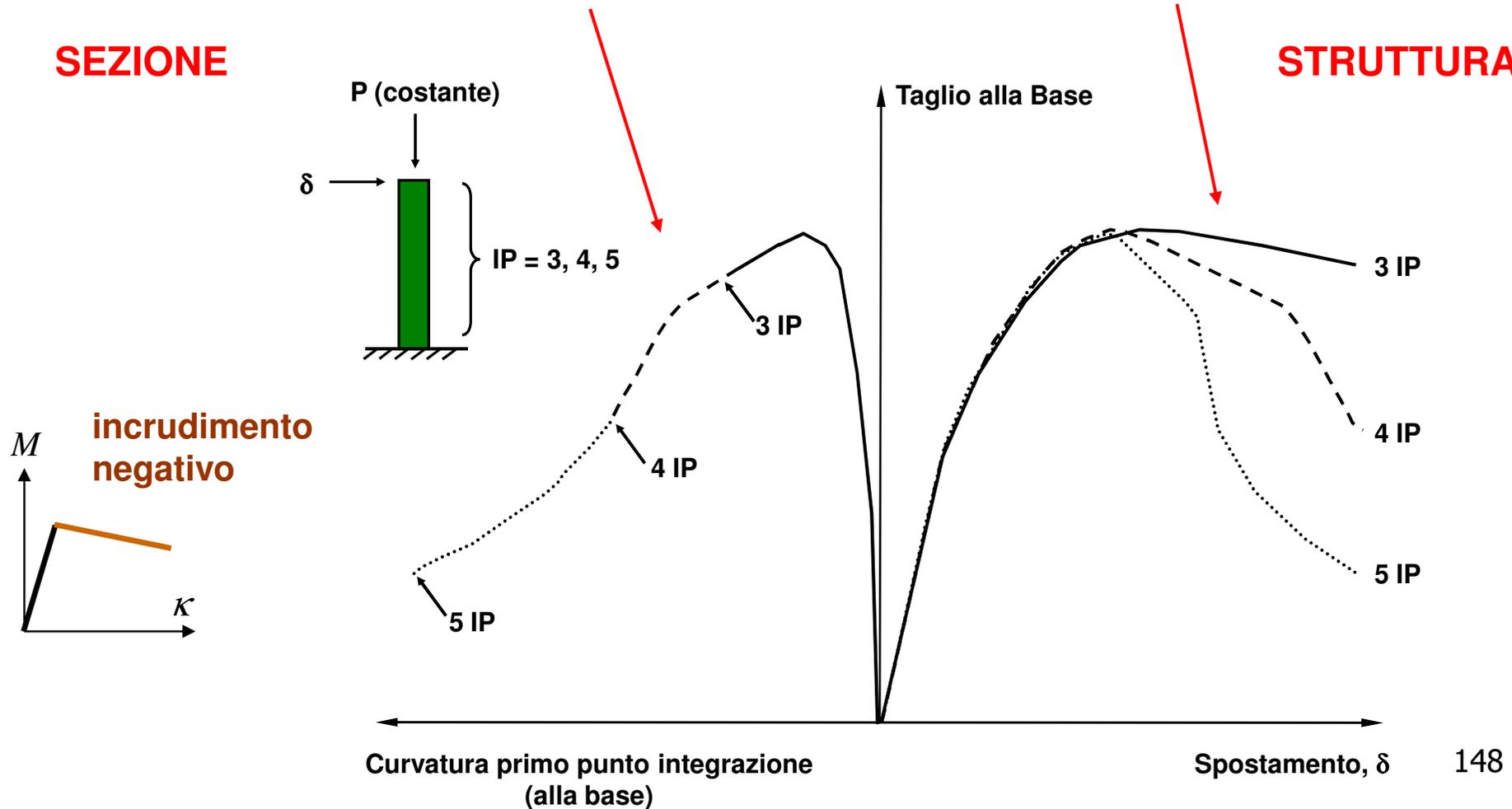
Punti di Integrazione IP=3,4,5 (Gauss-Lobatto)

**RISPOSTA NON OGGETTIVA**

**RISPOSTA NON OGGETTIVA**

**SEZIONE**

**STRUTTURA**

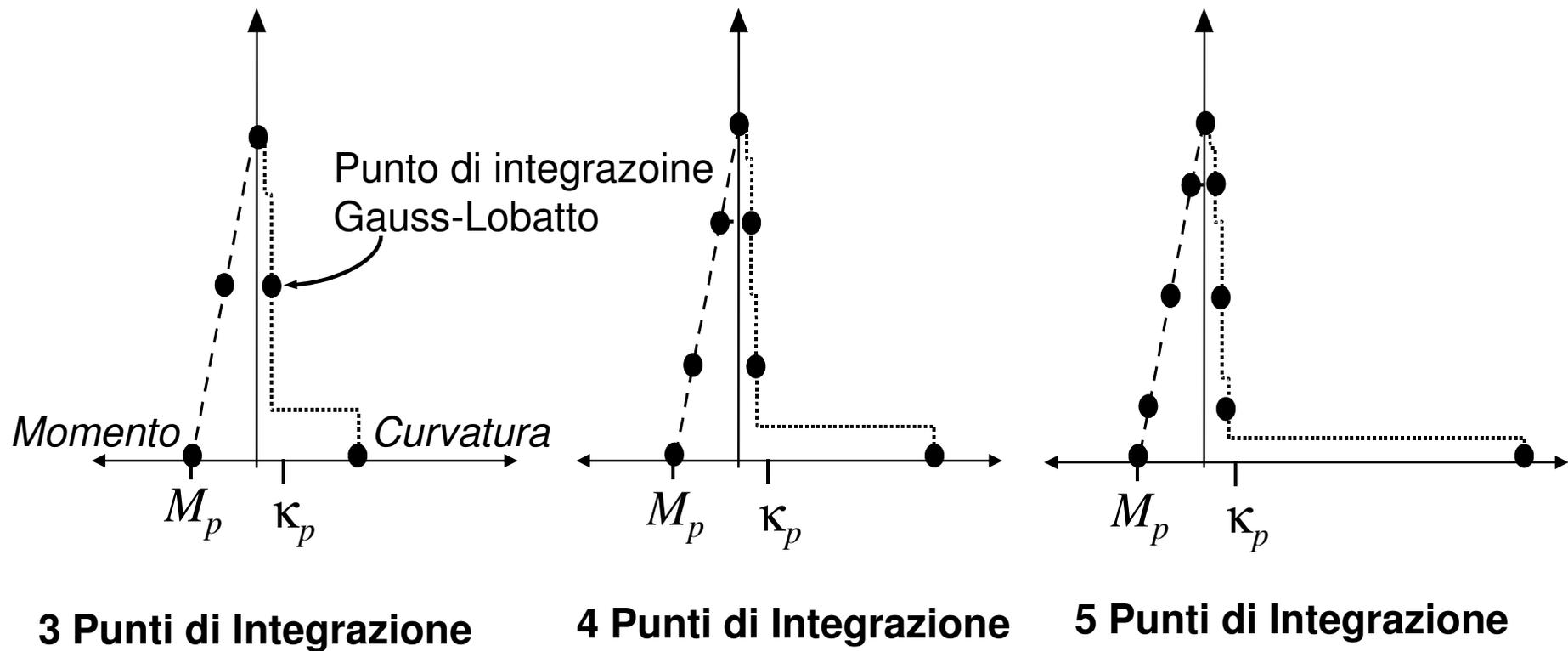


# PERDITA DI OGGETTIVITA'

---

## LOCALIZZAZIONE DELLA DEFORMAZIONE

A parità di spostamento in sommità



## LOCALIZZAZIONE DELLA DEFORMAZIONE

---

### Riepilogo 1/2

- In presenza di comportamento elastico-plastico perfetto o incrudente negativo si ha perdita di oggettività nella risposta.
- Per elementi in spostamenti la localizzazione avviene a livello dell'elemento, per cui la risposta diventa funzione della dimensione della mesh
- Per elementi in forze la localizzazione avviene sul singolo punto di integrazione, per cui la risposta diventa funzione del numero di punti di integrazione
- Esistono tecniche di regolarizzazione (non si trovano su molti programmi commerciali)

## LOCALIZZAZIONE DELLA DEFORMAZIONE

### Riepilogo 2/2

89



- Per elementi in spostamenti la regolarizzazione si basa su teorie ben note nel campo degli Elementi Finiti, ma non ben documentate per quanto riguarda gli elementi telaio
  
- Per elementi in forze la regolarizzazione comincia ad essere ben studiata
  - Coleman, J, and Spacone, E., (2001) "Localization Issues in Nonlinear Force-Based Frame Elements." *ASCE J. of Structural Engineering*, 127(11), 1257-1265
  - Scott, MH and Fenves, GL (2006) "Plastic Hinge Integration Methods for Force-Based Beam-Column Elements." *ASCE J. of Structural Engineering*, 123(2), 244-252
  - Adessi D, Ciampi V (2007) "A regularized force-based beam element with a damage-plastic section constitutive law." *Int. J. Numer. Meth. Engngn* <sup>151</sup>

---

END

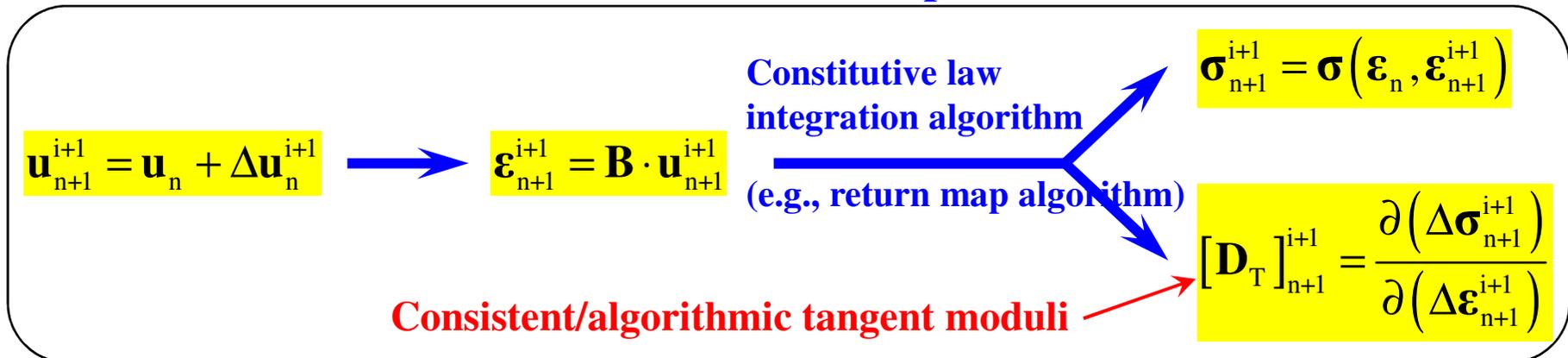
# Nonlinear Structural Dynamic Analysis

- Element state determination (displacement-based elements):

$$\mathbf{R}(\mathbf{u}_{n+1}^{i+1}) = \mathbf{A} \left\{ \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \cdot \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{i+1}) \cdot d\Omega_e \right\}_{e=1}^{Nel}$$

- $\boldsymbol{\varepsilon}$  = Strain (or strain resultant) vector;  $\mathbf{A} \{ \dots \}_{e=1}^{Nel}$  = Direct stiffness assembly operator
- $\boldsymbol{\sigma}$  = Stress (or stress resultant) vector;  $\mathbf{B}$  = Strain-displacement transformation matrix

- Stress (or stress resultant) vector at Gauss point (or section) level:

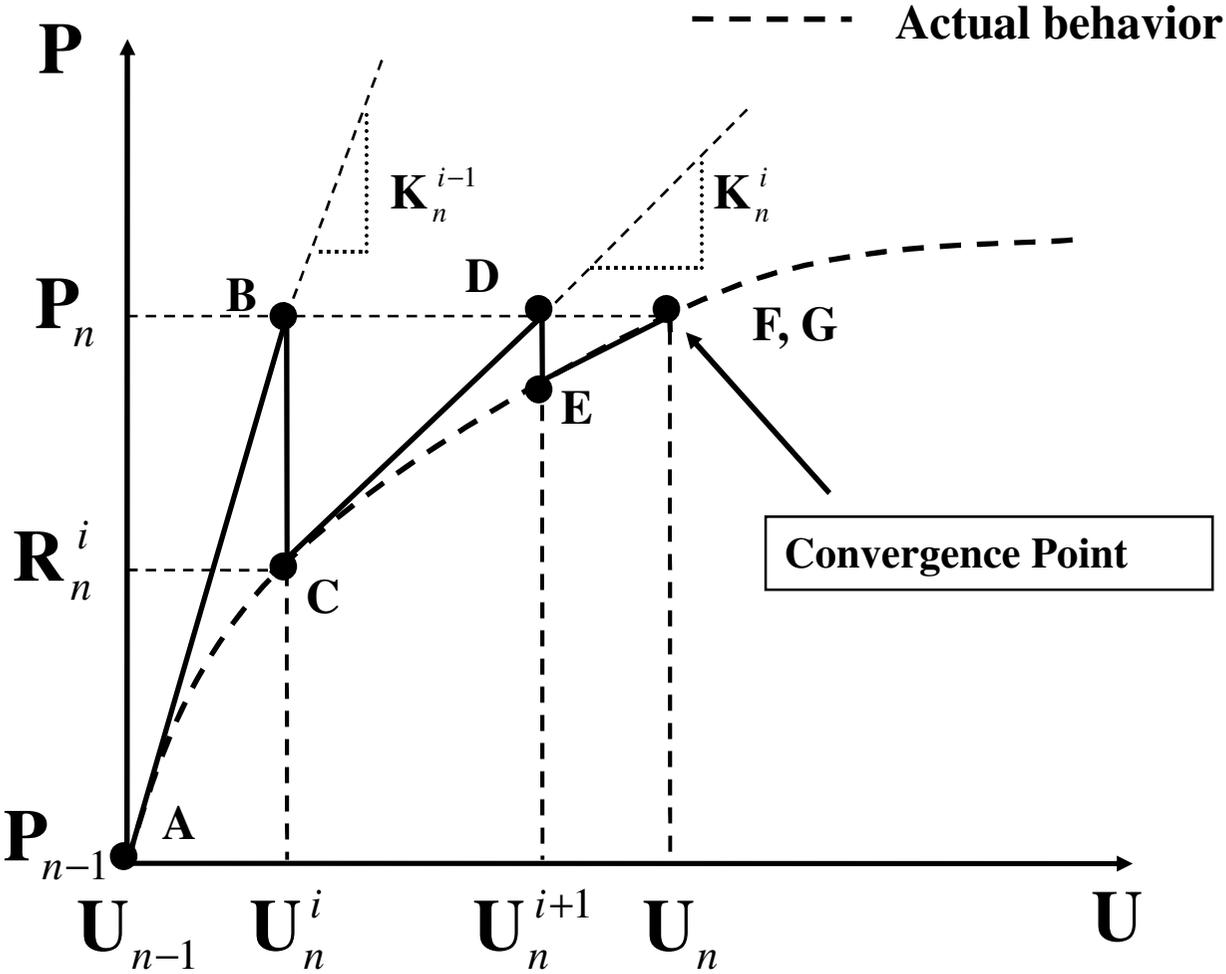


- Static consistent tangent stiffness matrix (at structure level):

$$\mathbf{K}_T^{\text{stat}}(\mathbf{u}_{n+1}^{i+1}) = \partial \mathbf{R}(\mathbf{u}_{n+1}^{i+1}) / \partial \mathbf{u}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{A} \left\{ \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \cdot [\mathbf{D}_T]_{n+1}^{i+1} \cdot \mathbf{B} \cdot d\Omega_e \right\}_{e=1}^{Nel}$$

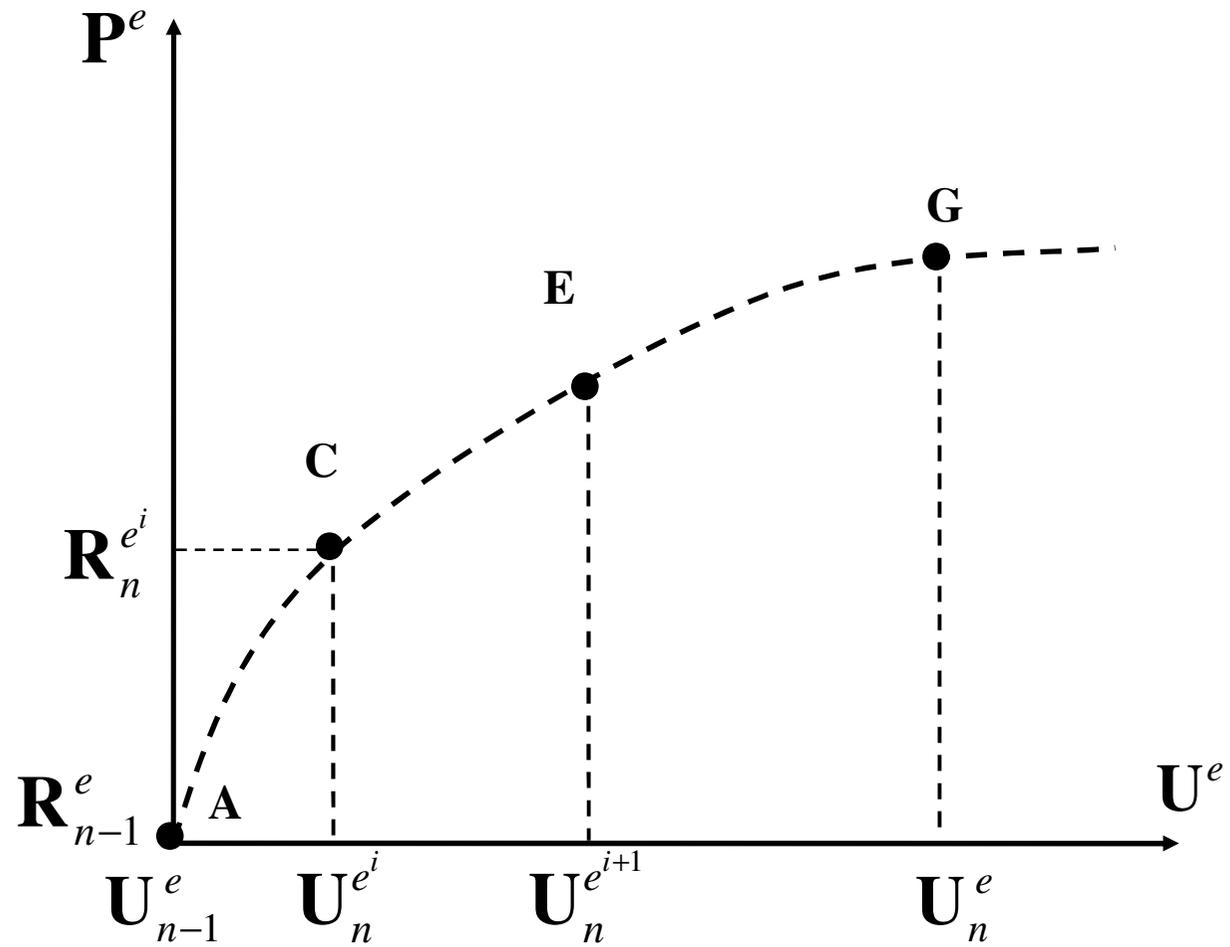
# STRUCTURE PROCEDURE: NR

One load step  $k$  with Newton Raphson iteration  $i$



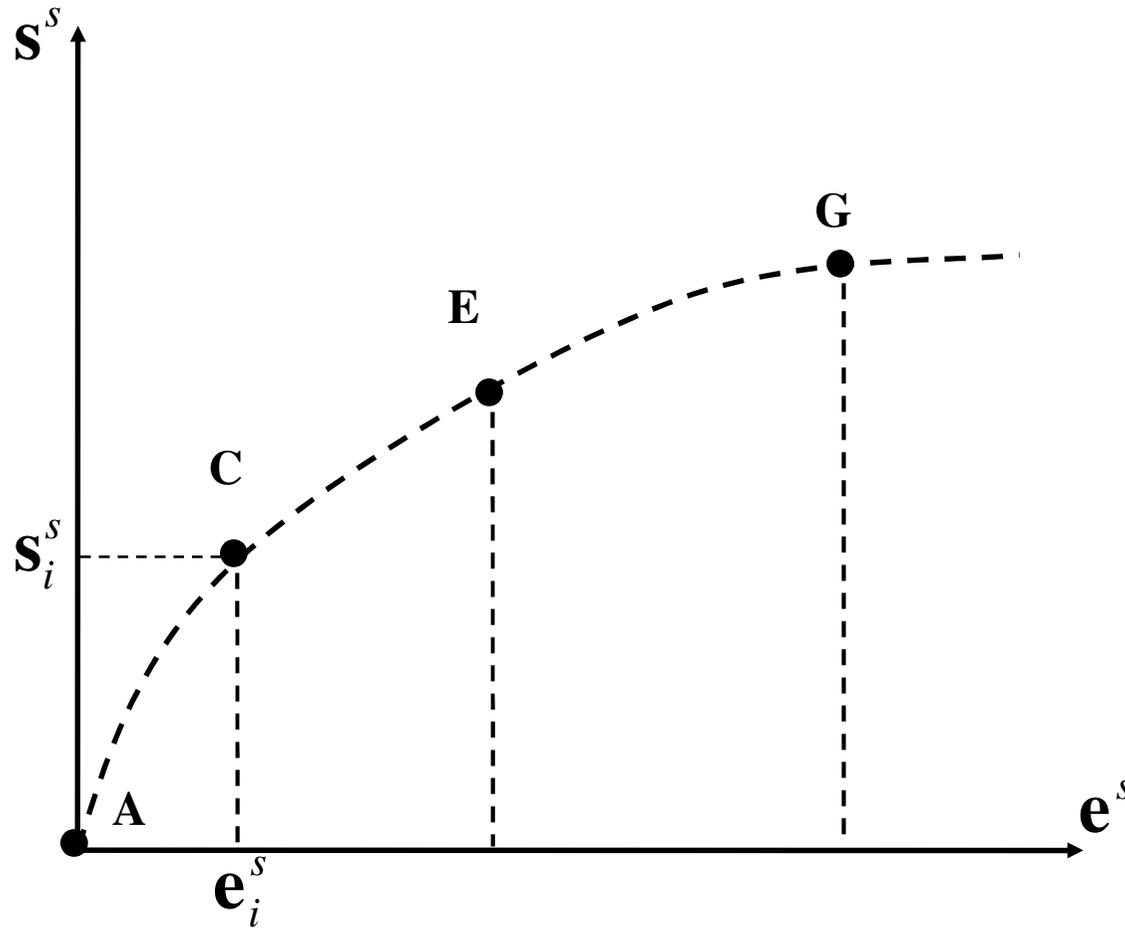
# ELEMENT STATE DETERMINATION: DB

---



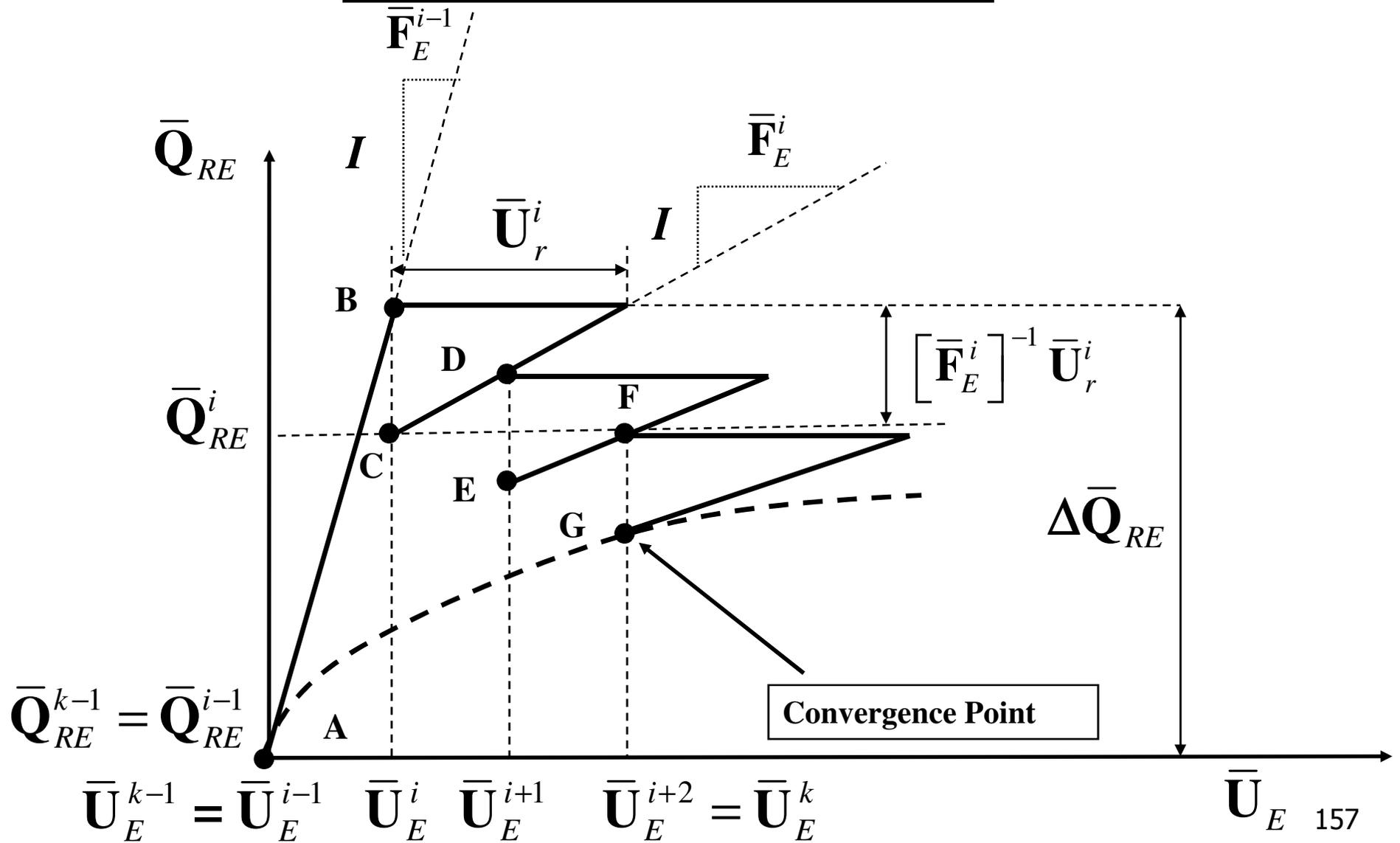
# ELEMENT STATE DETERMINATION: DB

---



# ELEMENT LEVEL

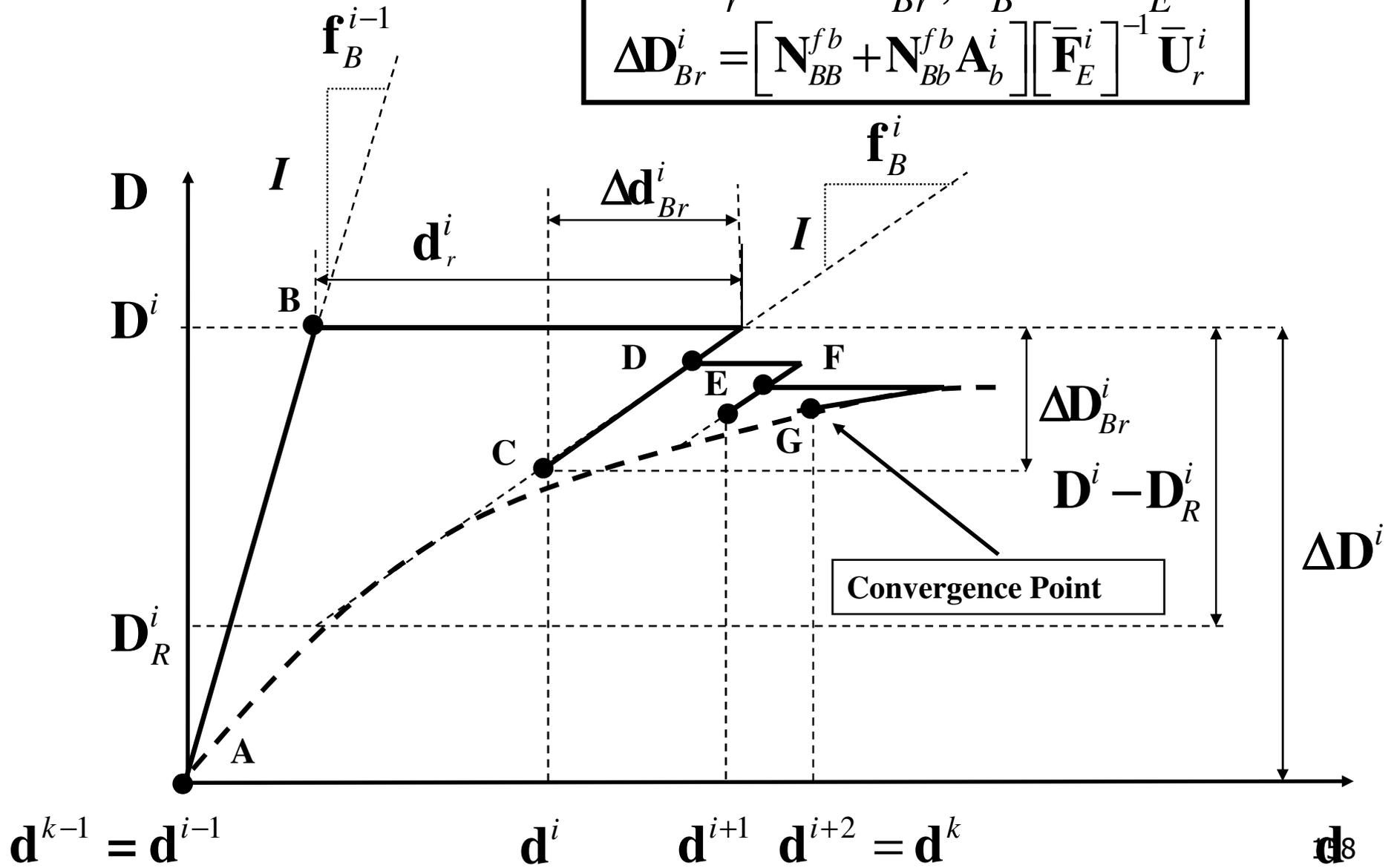
$$\bar{\mathbf{Q}}_{RE}^i \Rightarrow \mathbf{Q}_{RE}^i, \bar{\mathbf{F}}_E^i \Rightarrow \mathbf{K}_E^i$$



# BEAM SECTION LEVEL

$$\mathbf{d}_r^i \Rightarrow \bar{\mathbf{U}}_{Br}^i, \mathbf{f}_B^i \Rightarrow \bar{\mathbf{F}}_E^i$$

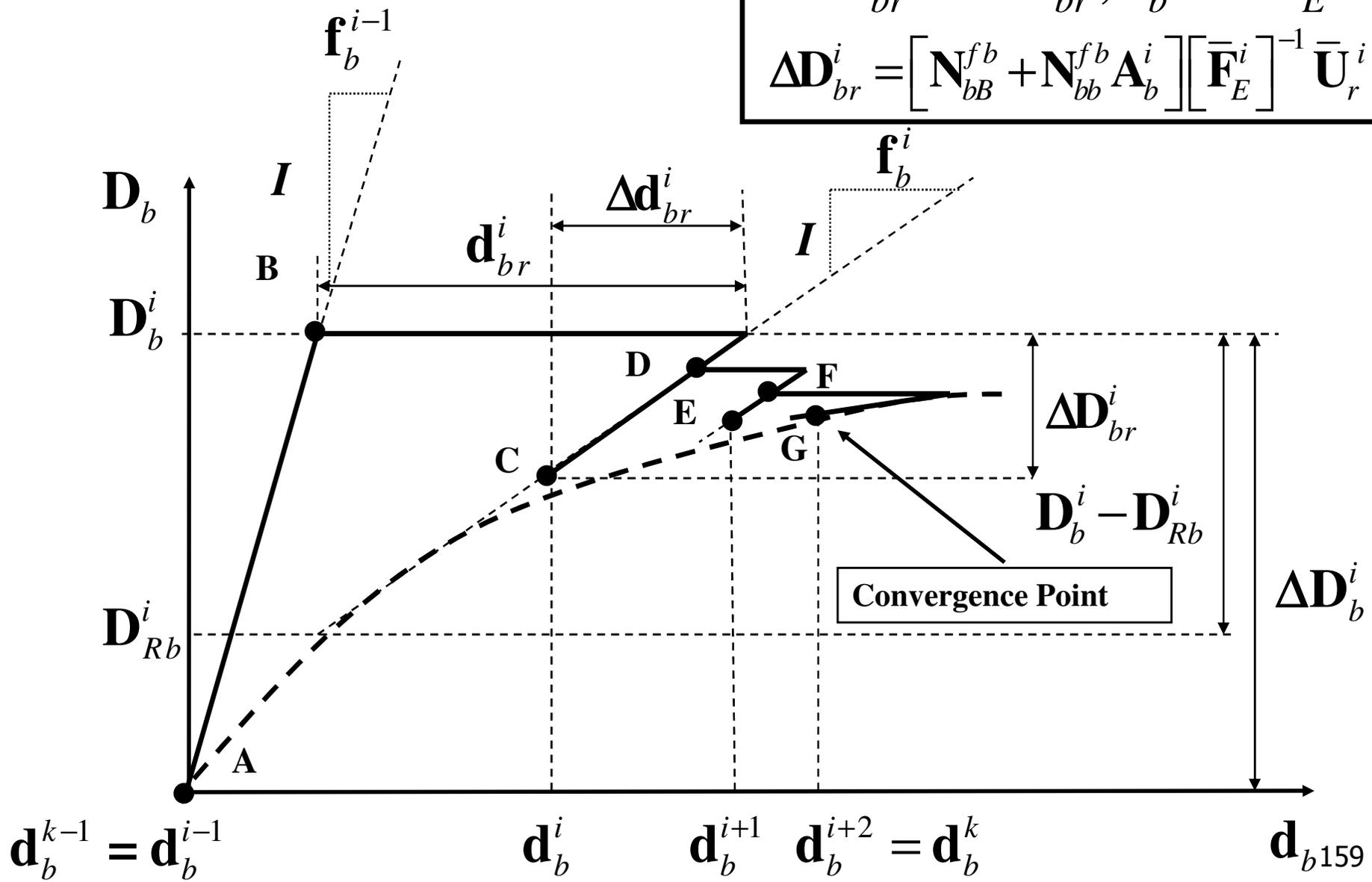
$$\Delta \mathbf{D}_{Br}^i = \left[ \mathbf{N}_{BB}^{fb} + \mathbf{N}_{Bb}^{fb} \mathbf{A}_b^i \right] \left[ \bar{\mathbf{F}}_E^i \right]^{-1} \bar{\mathbf{U}}_r^i$$



# BOND INTERFACE LEVEL

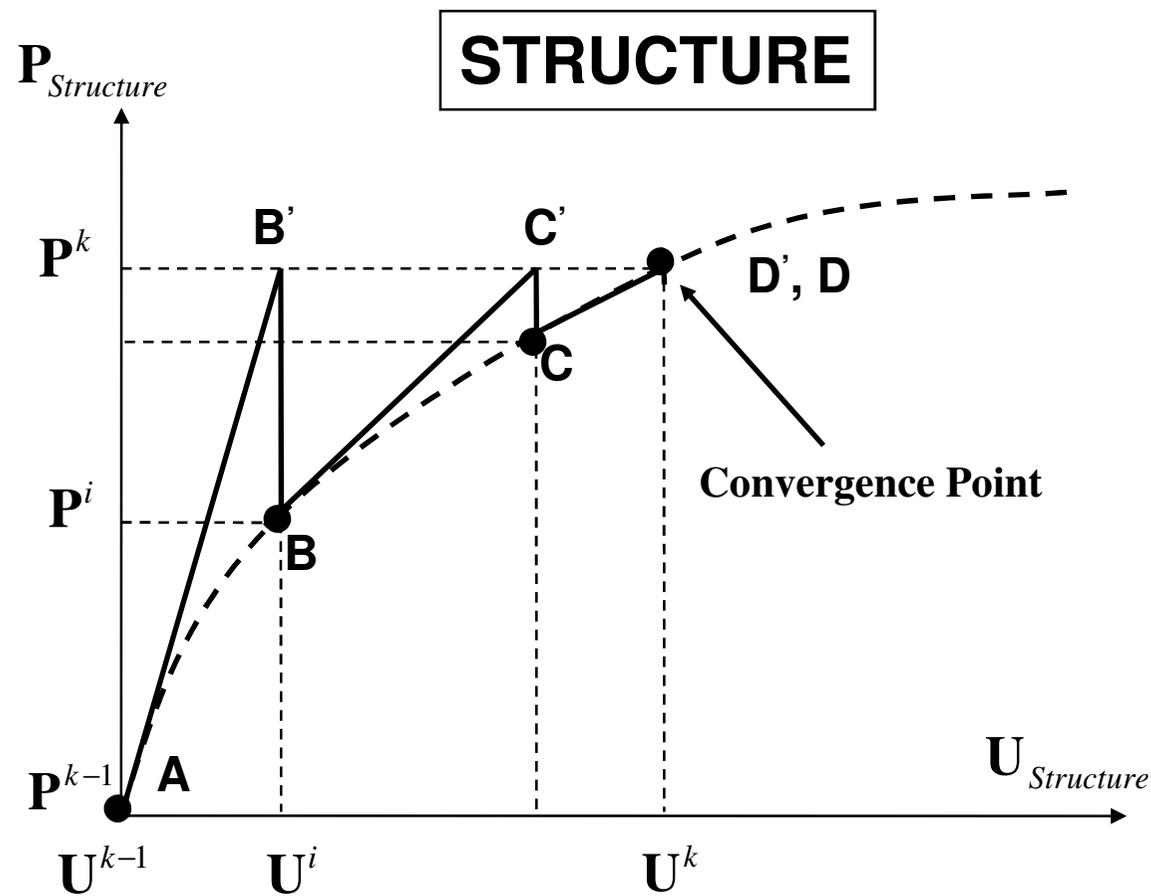
$$\mathbf{d}_{br}^i \Rightarrow \bar{\mathbf{U}}_{br}^i, \mathbf{f}_b^i \Rightarrow \bar{\mathbf{F}}_E^i$$

$$\Delta \mathbf{D}_{br}^i = \left[ \mathbf{N}_{bB}^{fb} + \mathbf{N}_{bb}^{fb} \mathbf{A}_b^i \right] \left[ \bar{\mathbf{F}}_E^i \right]^{-1} \bar{\mathbf{U}}_r^i$$



# STRUCTURAL LEVEL

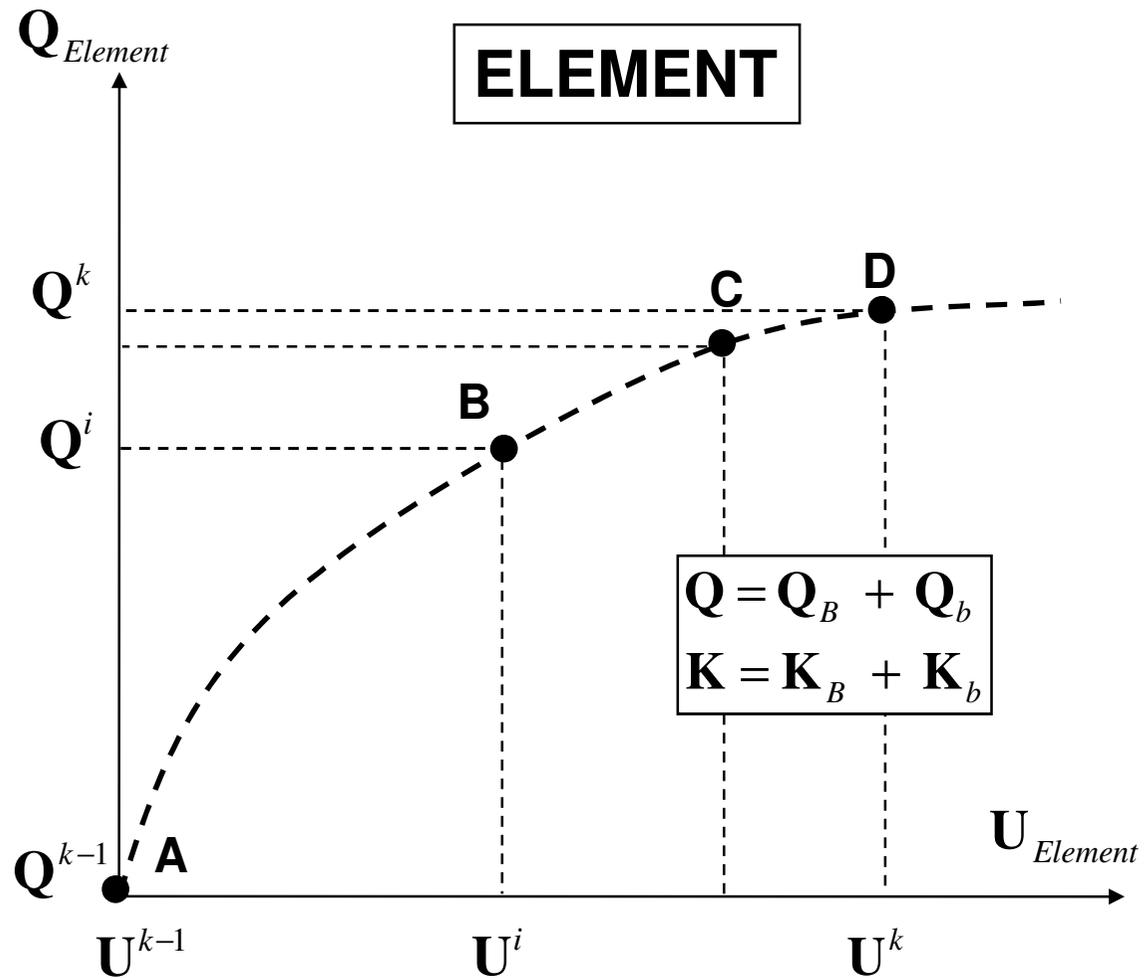
STRUCTURAL LEVEL: LOAD STEP  $k$   
NEWTON-RAPHSON ITERATIONS  $i$



# DISPLACEMENT-BASED FORMULATION

---

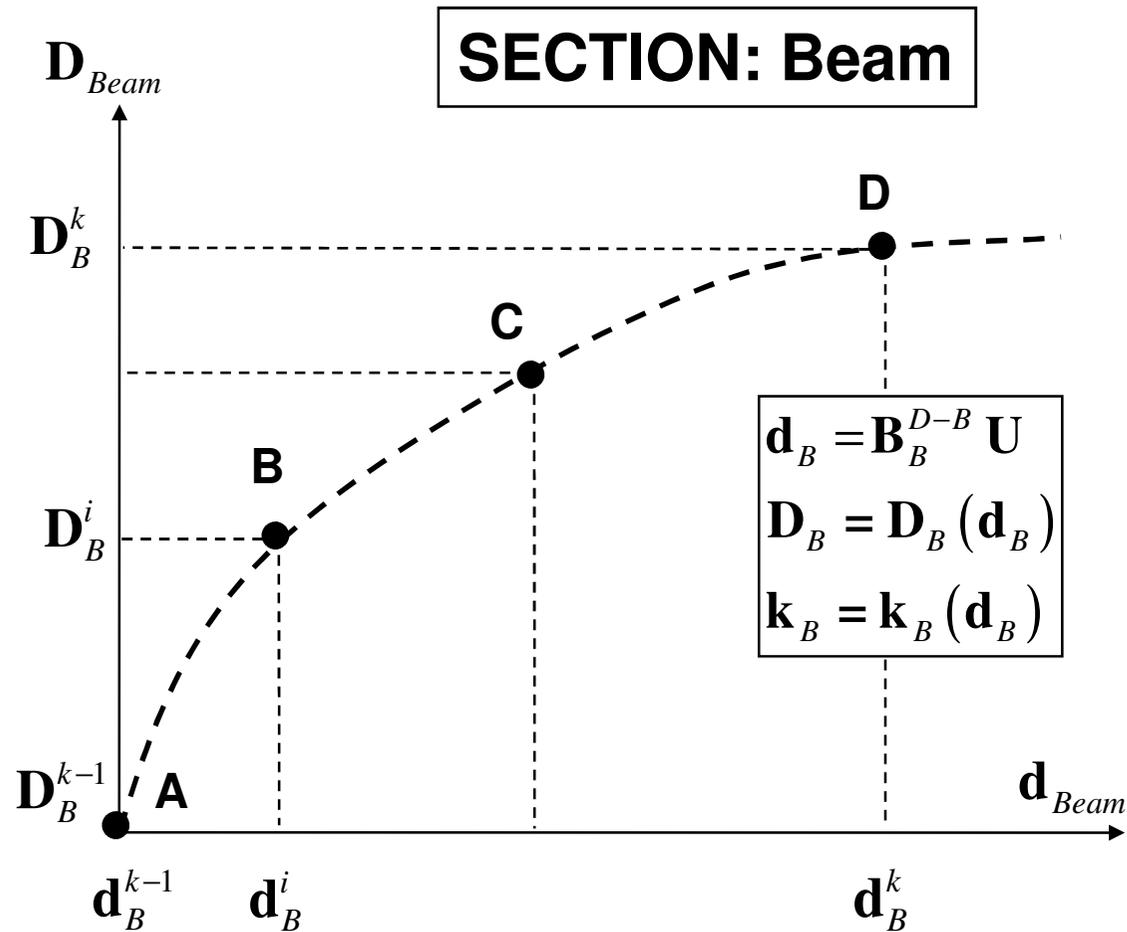
## ELEMENT STATE DETERMINATION



# DISPLACEMENT-BASED FORMULATION

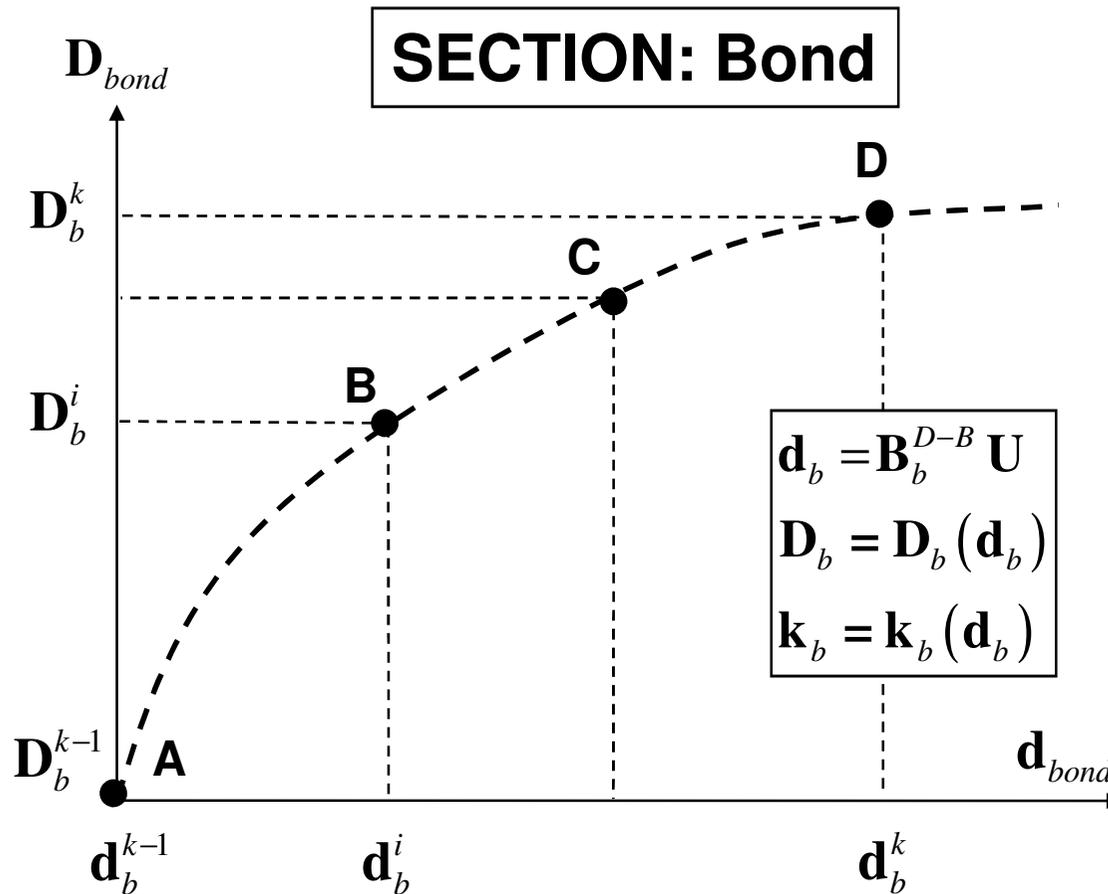
---

## BEAM SECTION STATE DETERMINATION

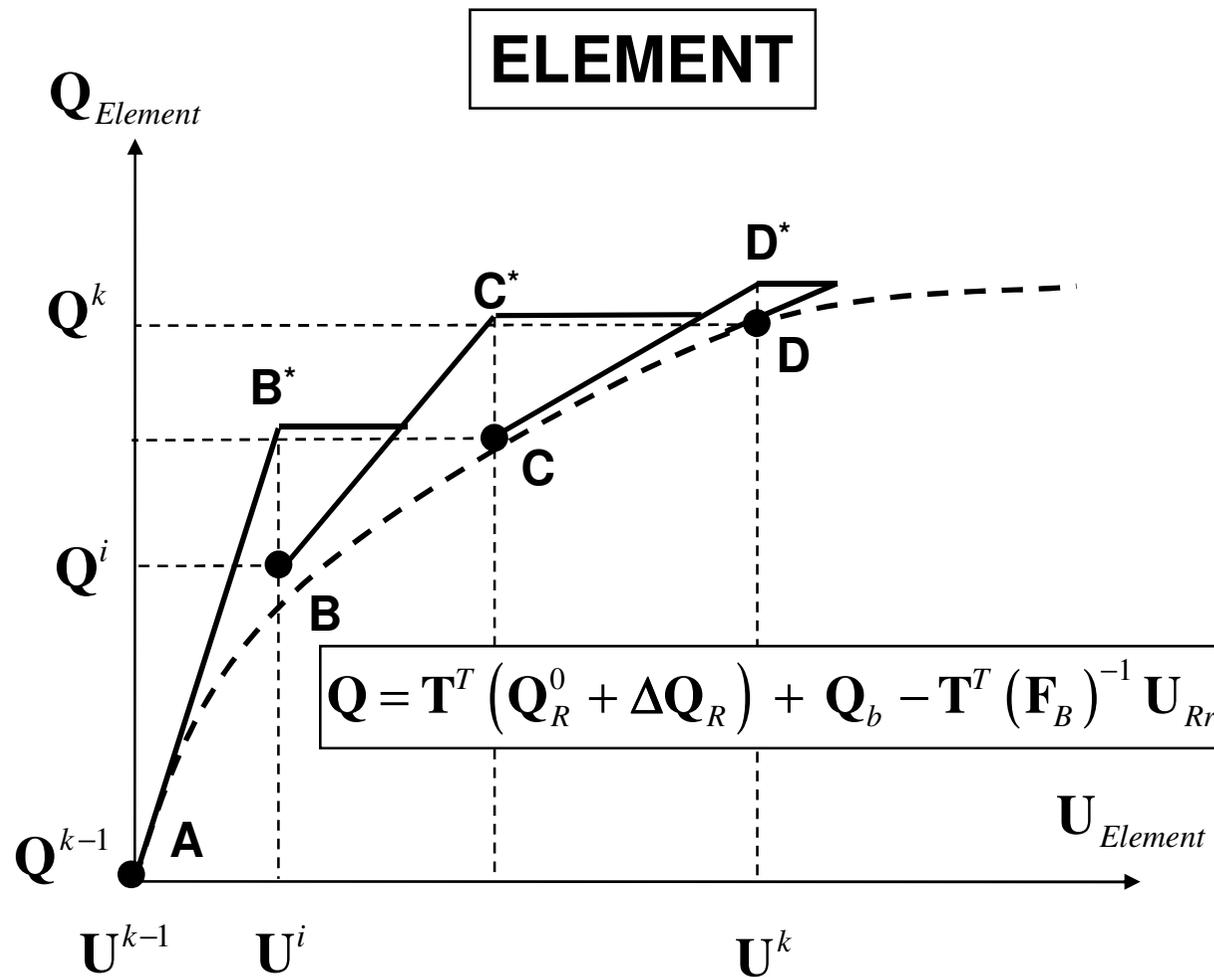


# DISPLACEMENT-BASED FORMULATION

## BOND STATE DETERMINATION

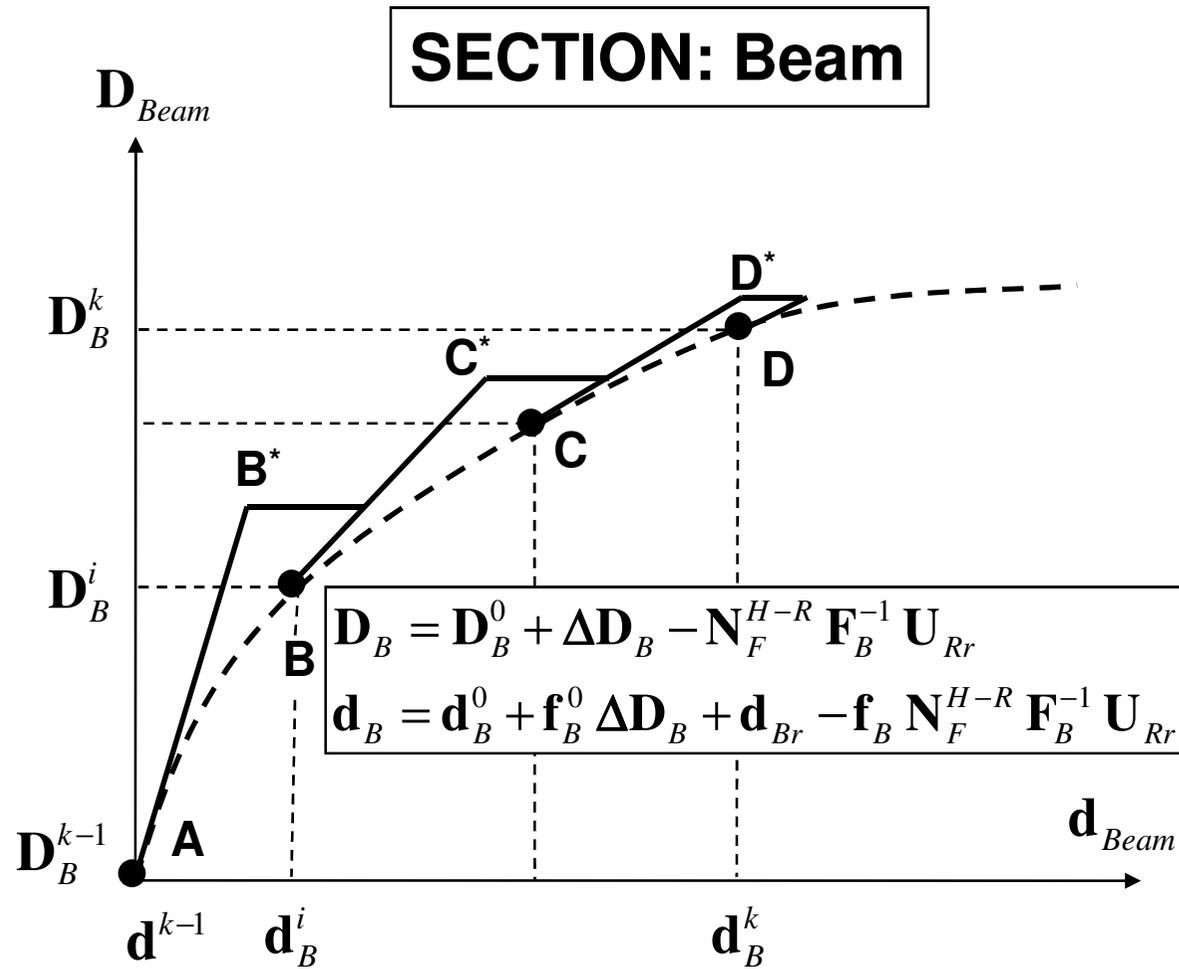


# HELLINGER-REISSNER FORMULATION ELEMENT STATE DETERMINATION



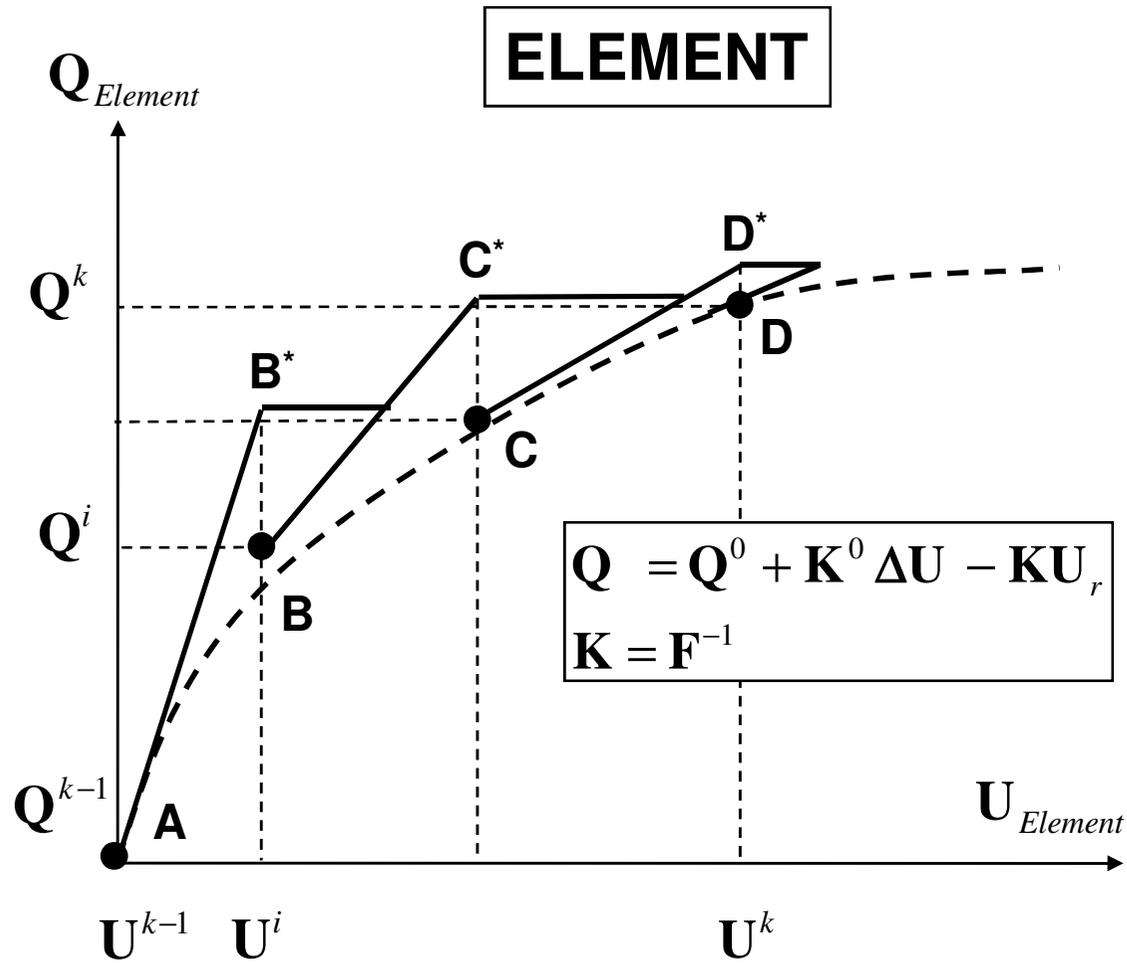
# HELLINGER-REISSNER FORMULATION

## BEAM SECTION STATE DETERMINATION



# FORCE-BASED FORMULATION

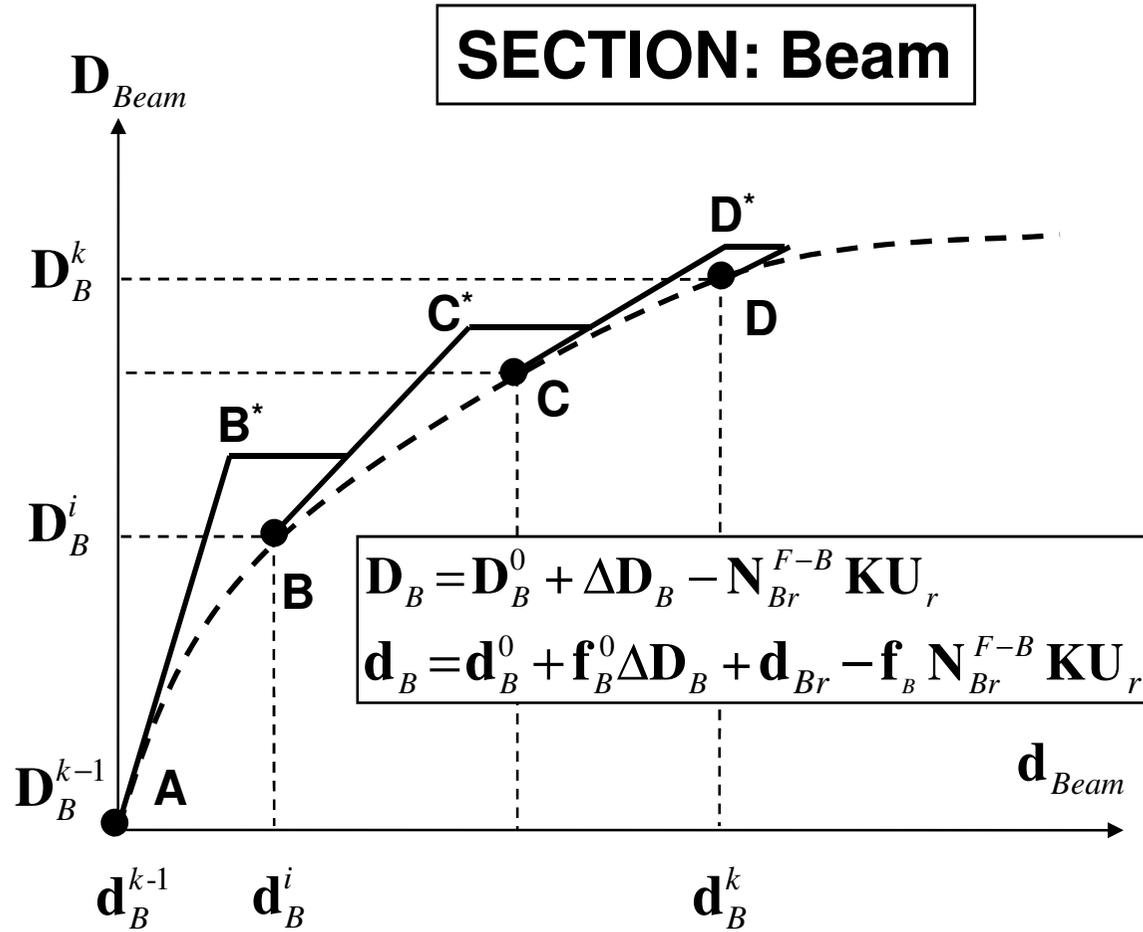
## ELEMENT STATE DETERMINATION



# FORCE-BASED FORMULATION

---

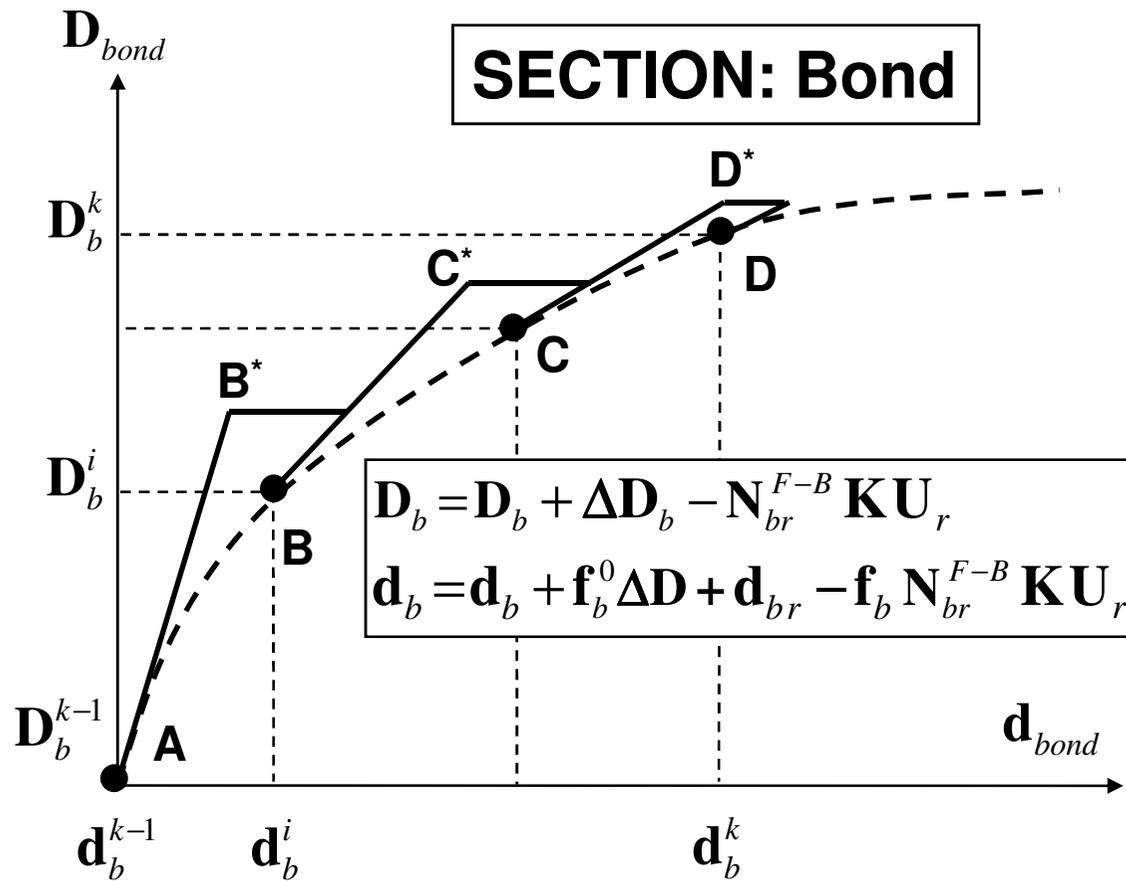
## BEAM SECTION STATE DETERMINATION



# FORCE-BASED FORMULATION

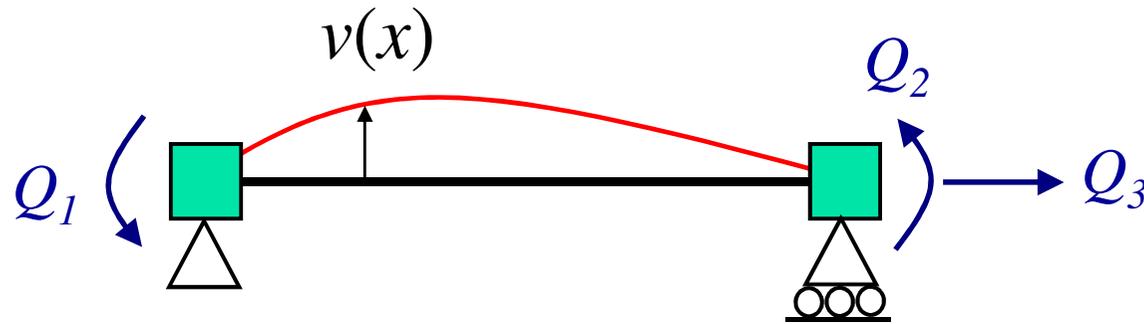
---

## BOND STATE DETERMINATION



# ELEMENTI A PLASTICITA' DISTRIBUITA

## Formulazione in forze: P- $\delta$

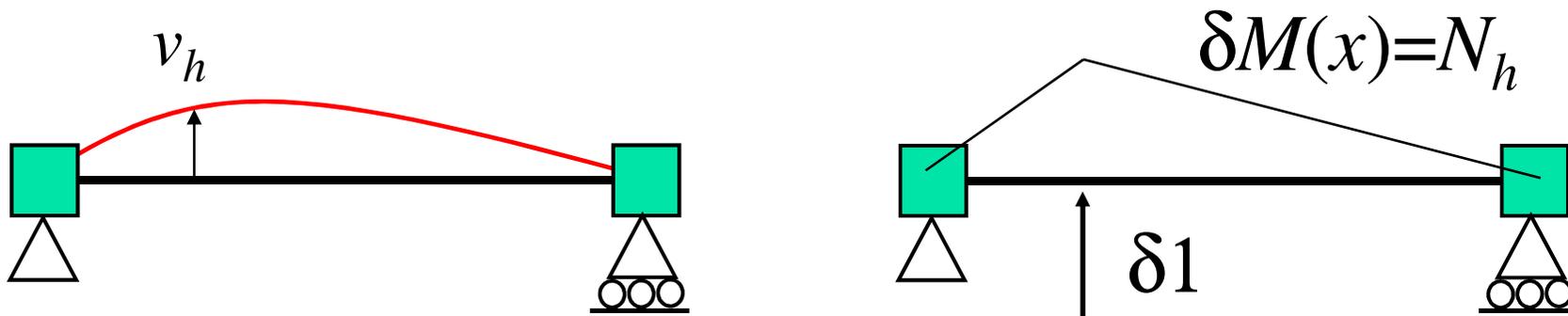


$$\mathbf{s}^s(x) = \begin{Bmatrix} N(x) \\ M(x) \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 + \frac{x}{L} & \frac{x}{L} & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}_Q(x)} \underbrace{\begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{Q}^e} + \underbrace{Q_3}_{N} v$$

Only need  $v$  at integration points  $h=2, \dots, m-1$  ( $v_1=v_m=0$ ) 169

# ELEMENTI A PLASTICITA' DISTRIBUITA

## Formulazione in forze: P- $\delta$



Dummy load principle

$$v_h = \int_0^L \delta M(x) \varphi(x) = \sum_{l=1}^m M_{h_l} \varphi_l w_l L$$

$\varphi_l$  known from element state determination

## Consistent Mass Matrix

Given  $v_h$  at all integration points, velocity and acceleration at the same integration point computed using Newmark method

$$\dot{v}_{n+1} = (\Delta t) \left(1 - \frac{\alpha}{2\beta}\right) \ddot{v}_n + \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right) \dot{v}_n + \frac{\alpha}{\beta(\Delta t)} (v_{n+1} - v_n)$$

$$\ddot{v}_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{2\beta}\right) \ddot{v}_n - \frac{1}{\beta(\Delta t)} \dot{v}_n + \frac{1}{\beta(\Delta t)^2} (v_{n+1} - v_n)$$

Need to see how mass matrix can be derived, but it should not be difficult